EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liège*
N° 12, 1935.

Sur la variété des cordes d'une surface de Veronese,

par LUCIEN GODEAUX, Membre de la Société.

On sait que les cordes d'une surface de Veronese forment une variété cubique passant doublement par cette surface. Nous allons établir que cette variété est l'enveloppe d'un système doublement infini d'hyperquadriques.

1. Considérons deux plans σ_1, σ_2 dont nous désignerons les coordonnées projectives homogènes respectivement par y_1, y_2, y_3 et z_1, z_2, z_3. Posons

$$\rho X_{ik} = y_i z_k, \qquad (i, k = 1, 2, 3).$$

La variété de C. Segre, représentant les couples de points des plans σ_1, σ_2, a pour équations celles que l'on obtient en exprimant que le déterminant

$$\begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{vmatrix} \qquad (1)$$

est de caractéristique un. C'est une variété V_4^6 de S_8.

Considérons l'homographie ω

$$\rho y_i = z_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

entre σ_1, σ_2. Elle donne lieu, dans S_8, à l'homographie Ω

$$\rho X_{ik} = X_{ki} \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

transformant V_4^6 en elle-même. Les axes de l'homographie Ω sont :

1° un espace S_5, d'équations

$$X_{23} - X_{32} = 0, \qquad X_{31} - X_{13} = 0, \qquad X_{12} - X_{21} = 0,$$

coupant V_4^6 suivant une surface de Veronese;

2° un plan S_2 d'équations

$$X_{11} = X_{22} = X_{33} = 0, \qquad X_{23} + X_{32} = 0, \qquad X_{31} + X_{13} = 0,$$
$$X_{12} + X_{21} = 0,$$

ne rencontrant pas V_4^6.

2. Rapportons projectivement les hyperplans de S_8 passant par le plan S_2 aux hyperplans d'une espace S_5 en posant

$$\frac{Y_{11}}{2X_{11}} = \frac{Y_{22}}{2X_{22}} = \frac{Y_{33}}{2X_{33}} = \frac{Y_{23}}{X_{23} + X_{32}} = \frac{Y_{31}}{X_{31} + X_{23}} = \frac{Y_{12}}{X_{12} + X_{21}}.$$

L'homographie Ω détermine sur V_4^6 une involution d'ordre deux, I_2, dont nous obtiendrons une image en éliminant les X_{ik} entre les équations précédentes et les équations de V_4^6. On obtient ainsi l'équation

$$\begin{vmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{31} \\ Y_{12} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{23} & Y_{33} \end{vmatrix} = 0 \qquad (2)$$

qui représente, comme on sait, le lieu des cordes de la surface de Veronese Φ dont les équations s'obtiennent en égalant à zéro les mineurs du déterminant (2).

La surface Φ correspond à la surface unie de l'involution I_2 sur V_4^6 et par conséquent elle est double pour la variété M_4^3 représentée par l'équation (2), résultat d'ailleurs bien connu d'autre part.

3. Considérons les hyperplans

$$\lambda_1(X_{23} - X_{32}) + \lambda_2(X_{31} - X_{13}) + \lambda_3(X_{12} - X_{21}) = 0 \qquad (3)$$

de S_8 passant par l'espace S_5 uni de l'homographie Ω. Cherchons quelles sont les variétés de l'hypersurface M_4^3 qui correspondent aux sections de V_4^6 par ces hyperplans.

En élevant le premier membre de l'équation (3) au carré, puis introduisant les Y, on obtient

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_1^2(Y_{23}^2 - Y_{22}Y_{33}) + \lambda_2^2(Y_{31}^2 - Y_{33}Y_{11}) + \lambda_3^2(Y_{12}^2 - Y_{11}Y_{22}) \\ &\quad + 2\lambda_2\lambda_3(Y_{11}Y_{23} - Y_{31}Y_{12}) + 2\lambda_3\lambda_1(Y_{22}Y_{31} - Y_{12}Y_{23}) \\ &\quad + 2\lambda_1\lambda_2(Y_{33}Y_{12} - Y_{23}Y_{31}) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

C'est une famille ∞^2 d'hyperquadriques qui, d'après la théorie des involutions, passent par la surface Φ et touchent la variété M_4^3 en tout point d'intersection.

Aux sections de V_4^6 par les hyperplans (3) correspondent les variétés de contact des hyperquadriques (4) avec M_4^3; ce sont des variétés à trois dimensions du troisième ordre.

Si nous désignons par Δ les sections hyperplanes de M_4^3, par Δ_0 les variétés de contact des hyperquadriques (4) avec M_4^3 et par Φ_0 l'ensemble des points de M_4^3 infiniment voisins de Φ, ensemble qui, du point de vue des transformations birationnelles, doit être regardé comme une variété à trois dimensions, nous avons la relation fonctionnelle

$$2\Delta \equiv 2\Delta_0 + \Phi_0.$$

4. Les points de σ_1 associés à un point fixe de σ_2, donnent sur la variété V_4^6 les points d'un plan σ_1'. Les plans σ_1' forment une congruence linéaire, deux plans de la congruence ne se rencontrant pas. En associant les points de σ_2 aux différents points de σ_1, on obtient de même ∞^2 plans σ_2' de V_4^6, formant une congruence linéaire. Un plan σ_1' et un plan σ_2' sont toujours unisécants.

L'homographie Ω échange entre eux les plans σ_1', σ_2' et il correspond donc à ces plans, sur M_4^3, une famille doublement infinie de plans, d'indice deux.

Le plan σ_2' associé au point y du plan σ_1 a pour équations

$$\frac{X_{11}}{y_1} = \frac{X_{21}}{y_2} = \frac{X_{31}}{y_3}, \qquad \frac{X_{12}}{y_1} = \frac{X_{22}}{y_2} = \frac{X_{32}}{y_3}, \qquad \frac{X_{13}}{y_1} = \frac{X_{23}}{y_2} = \frac{X_{33}}{y_3}.$$

Le plan correspondant sur la variété M_4^3 a pour équations

$$y_2^2 Y_{33} - 2y_2y_3 Y_{23} + y_3^2 Y_{22} = 0,$$
$$y_3^2 Y_{11} - 2y_3y_1 Y_{31} + y_1^2 Y_{33} = 0,$$
$$y_1^2 Y_{22} - 2y_1y_2 Y_{12} + y_2^2 Y_{11} = 0.$$

C'est donc un plan tangent à la surface de Veronese. On sait d'ailleurs que par un point de M_4^3 passent deux de ces plans.

5. Les points de V_4^6 représentant les couples de points d'une droite de σ_1 et d'une droite de σ_2 forment une quadrique. On a ainsi sur V_4^6, ∞^4 quadriques.

La quadrique qui représente les couples de points des droites

$$\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \mu_3 y_3 = 0, \qquad \nu_1 z_1 + \nu_2 z_2 + \nu_3 z_3 = 0$$

appartient aux hyperplans

$$\mu_1 X_{i1} + \mu_2 X_{i2} + \mu_3 X_{i3} = 0, \qquad \nu_1 X_{1i} + \nu_2 X_{2i} + \nu_3 X_{3i} = 0,$$
$$(i = 1, 2, 3).$$

Pour que cette quadrique soit unie pour Ω, on doit avoir

$$\mu_1 : \mu_2 : \mu_3 = \nu_1 : \nu_2 : \nu_3.$$

A une telle quadrique correspond, sur M_4^3, le plan d'équations

$$\mu_1 Y_{11} + \mu_2 Y_{12} + \mu_3 Y_{31} = 0,$$
$$\mu_1 Y_{12} + \mu_2 Y_{22} + \mu_3 Y_{23} = 0,$$
$$\mu_1 Y_{31} + \mu_2 Y_{23} + \mu_3 Y_{33} = 0,$$

c'est-à-dire le plan d'une conique de la surface de Veronese Φ.

Liége, le 8 décembre 1936.

M. HAYEZ, imprimeur de l'Académie royale de Belgique, rue de Louvain, 112, Bruxelles.