Sur une variété algébrique à trois dimensions de bigenre un,

par LUCIEN GODEAUX,
Correspondant de l'Académie.

On sait que M. Enriques a construit une surface de genres zéro et de bigenre un ($p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$) dont l'équation s'écrit

$$f_2(x_2x_3x_4, x_3x_4x_1, x_4x_1x_2, x_1x_2x_3) + x_1x_2x_3x_4\varphi_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,$$

f_2 et φ_2 étant des formes algébriques quadratiques (1). C'est une surface du sixième ordre passant doublement par les arêtes du tétraèdre de référence. Il a établi plus tard que toute surface de genres $p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$ est birationnellement identique à la surface précédente (ou à un de ses cas limites) et que cette surface est l'image d'une involution du second ordre, privée de points unis, appartenant à une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$). En vue de préparer la classification des variétés algébriques de trois dimensions, il nous a paru intéressant de chercher à étendre les considérations de M. Enriques à ces variétés. Nous avons en particulier établi que si une variété algébrique V, à trois dimensions, sur laquelle tout système linéaire de surfaces est son propre adjoint, possède une involution du second ordre n'ayant qu'un nombre fini de points unis, la variété image de cette involution possède une surface bicanonique

(1) Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche (*Mem. Soc. Ital. delle Scienze*, 1896, pp. 1-181). Pour la bibliographie, voir notre exposé sur *Les Surfaces algébriques non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls* (Paris, Herman, 1931).

d'ordre zéro sans posséder de surface canonique [1]. Cette variété a donc les genres $P_g=0$, $P_2=1$; tout système linéaire de surfaces tracées sur cette variété est distinct de son système adjoint, mais coïncide avec son système biadjoint. Ce sont bien les propriétés analogues à celles de la surface d'Enriques.

Dans cette note, nous nous proposons d'étudier une variété algébrique à trois dimensions de genres $P_g=0$, $P_2=1$, sur laquelle tout système linéaire de surfaces coïncide avec son biadjoint, tout en étant distinct de son adjoint.

1. Considérons, dans un espace linéaire à quatre dimensions S_4, quatre hyperquadriques linéairement indépendantes, ayant en commun seize points distincts. Soient

$$\varphi_1(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \varphi_3 = 0, \quad \varphi_4 = 0$$

les équations de ces hyperquadriques.

Envisageons la variété à trois dimensions V d'équation

$$\varphi_2^2\varphi_3^2 + \varphi_3^2\varphi_1^2 + \varphi_1^2\varphi_2^2 - \varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4 = 0,$$

dont on peut remarquer l'analogie avec l'équation de la surface de Steiner.

Désignons par G_1, G_2, G_3 les surfaces du quatrième ordre ayant respectivement pour équations

$$\varphi_2 = \varphi_3 = 0, \qquad \varphi_3 = \varphi_1 = 0, \qquad \varphi_1 = \varphi_2 = 0,$$

par G la courbe du huitième ordre d'équations

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0,$$

enfin par P_1, P_2, ..., P_{16} les seize points communs aux quatre hyperquadriques.

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = 0.$$

---

[1] Sur les involutions du second ordre appartenant à certaines variétés algébriques à trois dimensions. (*C. R.*, déc. 1935, pp. 1169-1170.)

On voit aisément que la variété V passe

1° doublement par les surfaces G_1, G_2, G_3;

2° triplement par la courbe G;

3° quadruplement par les points $P_1, P_2, \ldots, P_{16}$.

Le système canonique de la variété V est découpé sur celle-ci par les adjointes d'ordre $8-5=3$, c'est-à-dire par les hypersurfaces cubiques passant simplement par les surfaces G_1, G_2, G_3. Une telle hypersurface, si elle existait, devrait rencontrer l'hyperquadrique φ_1 suivant deux surfaces du quatrième ordre G_2, G_3 et par suite elle contiendrait cette hyperquadrique comme partie. La surface G_1 devrait donc appartenir à un hyperplan, ce qui est impossible. Par conséquent, la variété V est dépourvue de surfaces canoniques et son genre géométrique est $P_g=0$.

Les biadjointes de la variété V sont des hypersurfaces d'ordre six passant doublement par les surfaces G_1, G_2, G_3. Ces hypersurfaces rencontrent l'hyperquadrique φ_1 suivant les surfaces G_2, G_3 comptées deux fois et par conséquent elles contiennent cette hyperquadrique. Elles sont complétées par des hypersurfaces du quatrième ordre rencontrant φ_2 suivant la surface G_3 et suivant la surface G_1 comptée deux fois; ces hypersurfaces contiennent φ_2 comme partie et sont complétées par des hyperquadriques passant par G_1, G_2, c'est-à-dire par φ_3. La variété V possède donc une seule hypersurface biadjointe

$$\varphi_1\varphi_2\varphi_3=0.$$

Cette hypersurface ne rencontre pas V en dehors de G_1, G_2, G_3, donc V possède une surface bicanonique d'ordre zéro et on a $P_2=1$.

2. Désignons par F les sections hyperplanes de V. Les adjointes F′ des surfaces F sont découpées sur V par les adjointes d'ordre $8-4=4$ de cette variété, c'est-à-dire par les hypersurfaces d'ordre quatre passant simplement par les surfaces G_1, G_2, G_3.

Celles de ces hypersurfaces du quatrième ordre passant par un point de φ_1 n'appartenant pas à G_2 ou à G_3 contiennent φ_1 comme partie et sont complétées par les hyperquadriques passant par G_1. Il en résulte que le système $|F'|$ est découpé sur V par les hypersurfaces d'équation

$$\lambda_1\varphi_2\varphi_3 + \lambda_2\varphi_3\varphi_1 + \lambda_3\varphi_1\varphi_2 = 0.$$

Les surfaces F′ sont d'ordre huit. Les sections hyperplanes F de V sont de genre géométrique $p_g = 3$. Nous avons eu l'occasion de les étudier récemment [1]; elles sont régulières ($p_a = p_g = 3$), de genre linéaire $p^{(1)} = 9$ et le diviseur $\sigma = 2$. Il en résulte en particulier que l'irrégularité superficielle de la variété V est nulle.

Le système $|F' - F|$ n'existe pas. Le fait que la variété V possède une surface bicanonique d'ordre zéro entraîne la coïncidence du système $|F|$ et de son biadjoint $|F''|$. En d'autres termes, $|F|$ est à son tour l'adjoint de $|F'|$.

Les surfaces F′, d'ordre huit, ont les genres $p_a = p_g = 5$, $p^{(1)} = 9$.

Des propriétés précédentes, on déduit facilement que la variété V est dépourvue de surfaces pluricanoniques d'indices impairs, mais possède des surfaces pluricanoniques d'indices pairs d'ordre zéro :

$$P_3 = P_5 = \cdots = P_{2i+1} = 0, \qquad P_2 = P_4 = \cdots = P_{2i} = 1.$$

L'hypersurface du huitième ordre, d'équation

$$\varphi_2^2\varphi_3^2 + \varphi_3^2\varphi_1^2 + \varphi_1^2\varphi_2^2 - \varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4 = 0,$$

où

$$\varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \qquad \varphi_3 = 0, \qquad \varphi_4 = 0$$

représentent des hyperquadriques linéairement indépendantes de S_4 *ayant en commun seize points distincts, est dépourvue de surfaces canoniques et pluricanoniques d'indices impairs, mais possède des surfaces pluricanoniques d'indices pairs d'ordre zéro :*

$$P_g = P_3 = \cdots = P_{2i+1} = 0, \qquad P_2 = P_4 = \cdots = P_{2i} = 1.$$

(1) Sur une surface algébrique du huitième ordre. (*The Tôhoku Mathematical Journal*, 1933, pp. 122-126.)

Sur cette hypersurface, tout système linéaire de surfaces est distinct de son adjoint, mais coïncide avec son biadjoint.

De plus, *la surface d'équations*

$$\varphi_2^2\varphi_3^2 + \varphi_3^2\varphi_1^2 + \varphi_1^2\varphi_2^2 - \varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4 = 0,$$
$$\lambda_1\varphi_2\varphi_3 + \lambda_2\varphi_3\varphi_1 + \lambda_3\varphi_1\varphi_2 = 0$$

est une surface à sections hyperplanes canoniques, de genres $p_a = p_g = 5$, $p^{(1)} = 9$.

3. Les équations

$$\frac{\varphi_1}{\mu_1} = \frac{\varphi_2}{\mu_2} = \frac{\varphi_3}{\mu_3} = \frac{\varphi_4}{\mu_4} \tag{1}$$

représentent une courbe du huitième ordre et de genre cinq. L'équation de la variété V donne

$$\mu_2^2\mu_3^2 + \mu_3^2\mu_1^2 + \mu_1^2\mu_2^2 - \mu_1\mu_2\mu_3\mu_4 = 0. \tag{2}$$

Si l'on interprète les μ comme les coordonnées des points d'un espace à trois dimensions, l'équation précédente représente une surface de Steiner, c'est-à-dire une surface rationnelle. La variété V contient donc une congruence rationnelle de courbes d'ordre huit et de genre cinq; cette congruence est d'ailleurs linéaire.

Observons qu'aux points d'une conique de la surface de Steiner (**2**) correspondent les courbes (**1**) situées sur une surface F′. La congruence envisagée n'est donc autre chose que la congruence des intersections des surfaces du réseau |F′|.

4. Nous allons rattacher la variété V à nos recherches sur les involutions citées au début de cette note.

Envisageons, dans un espace linéaire S_7, la variété $\overline{V}$ à trois dimensions d'équations

$$\varphi_1 = x_6x_7, \quad \varphi_2 = x_7x_5, \quad \varphi_3 = x_5x_6, \quad \varphi_4 = x_5^2 + x_6^2 + x_7^2. \tag{1}$$

C'est une variété du seizième ordre dont les sections hyperplanes sont des surfaces canoniques [1] (c'est-à-dire des surfaces dont les sections hyperplanes sont les courbes canoniques).

Il en résulte que le système des sections hyperplanes de la variété $\overline{V}$ est son propre adjoint et que cette variété possède des surfaces canonique et pluricanoniques d'ordre zéro ($P_g = P_2 = \ldots = P_i = 1$). Elle est, d'autre part, d'irrégularité superficielle nulle.

La variété $\overline{V}$ est transformée en elle-même par l'homographie harmonique H d'équation

$$\frac{x'_0}{x_0} = \frac{x'_1}{x_1} = \frac{x'_2}{x_2} = \frac{x'_3}{x_3} = \frac{x'_4}{x_4} = \frac{x'_5}{-x_5} = \frac{x'_6}{-x_6} = \frac{x'_7}{-x_7}.$$

Celle-ci possède comme axes ponctuels un espace S_4 d'équations

$$x_5 = x_6 = x_7 = 0$$

et un plan S_2 d'équations

$$x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0.$$

L'espace S_4 coupe la variété $\overline{V}$ en seize points et H détermine donc sur $\overline{V}$ une involution I_2 d'ordre deux, présentant seize points unis.

Nous avons établi qu'une variété image de cette involution est dépourvue de surface canonique, possède une surface bicanonique d'ordre zéro et que, sur cette variété, tout système linéaire de surfaces est distinct de son adjoint mais coïncide avec son biadjoint [2]. Cette variété image peut s'obtenir en projetant $\overline{V}$ de l'axe S_2 sur l'axe S_4, c'est-à-dire en éliminant x_5, x_6, x_7 entre les équations (1) de $\overline{V}$ On retrouve la variété V et l'on a la confirmation des résultats obtenus plus haut.

Aux seize points unis de l'involution I_2 donnée sur $\overline{V}$

---

(1) F. Enriques-Campedelli. *Lezioni sulla teorie delle superficie algebriche* (Padova, 1932). Voir p. 338.

(2) *Sur les involutions du second ordre...* (*loc. cit.*). Voir aussi *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, Cl. des Sc., 1935, pp. 1015-1021.

correspondent sur V les points quadruples $P_1, P_2, \ldots, P_{16}$, à cônes tangents rationnels (1). Au point de vue des transformations birationnelles, chacun de ces points est équivalent à une surface rationnelle; nous désignerons par le même symbole P_i la surface rationnelle équivalente au point P_i.

Nous avons alors, sur la variété V, la relation fonctionnelle

$$| 2F | \equiv | 2F' + P_1 + P_2 + \cdots + P_{16} |.$$

Les surfaces F correspondent aux sections de $\overline{V}$ par les hyperplans passant par l'axe S_2 et les surfaces F' aux sections de $\overline{V}$ par les hyperplans passant par l'axe S_4.

5. On peut également considérer, au lieu de la variété $\overline{V}$, la variété représentée par les équations

$$\varphi_1 = x_5^2, \quad \varphi_2 = x_5x_7, \quad \varphi_3 = x_6x_7, \quad \varphi_4 = x_6^2 + x_7^2. \tag{2}$$

Elle est également transformée en elle-même par l'homographie H et une variété image de l'involution engendrée par H a pour équation, dans S_4,

$$\varphi_1^2\varphi_3^2 + \varphi_2^4 = \varphi_1\varphi_2^2\varphi_4.$$

Cette variété est également dépourvue de surface canonique et possède une surface bicanonique d'ordre zéro. Les adjointes des sections hyperplanes de cette variété sont découpées par les hypersurfaces

$$\lambda_1\varphi_1\varphi_2 + \lambda_2\varphi_1\varphi_3 + \lambda_3\varphi_2^2 = 0.$$

On peut encore considérer la variété d'équations

$$\varphi_1 = x_5^2, \quad \varphi_2 = x_6^2, \quad \varphi_3 = x_5x_7, \quad \varphi_1 = x_7^2 - x_5x_6. \tag{3}$$

Elle est elle aussi transformée en elle-même par H et

(1) Sur les involutions cycliques appartenant à une variété algébrique à trois dimensions. (*Bull. de l'Acad. roy. de Belg.*, Cl. des Sc., 1931, pp. 29-39.)

l'involution engendrée par cette homographie a pour image la variété

$$(\varphi_1\varphi_4 - \varphi_3^2)^2 = \varphi_1^3\varphi_2.$$

Cette variété est dépourvue de surface canonique et possède une surface bicanonique d'ordre zéro. Les adjointes des sections hyperplanes sont découpées par les hypersurfaces

$$\lambda_1\varphi_1^2 + \lambda_2(\varphi_1\varphi_4 - \varphi_3^2) + \lambda_3\varphi_1\varphi_3 = 0.$$

6. Les involutions déterminées par l'homographie H sur les variétés (1), (2) ou (3) possèdent toutes seize points unis; cette propriété est générale.

Considérons une variété algébrique d'irrégularité superficielle nulle, à trois dimensions, $\overline{V}$, sur laquelle tout système linéaire de surfaces soit son propre adjoint, contenant une involution du second ordre possédant α points unis. Construisons sur $\overline{V}$ un système linéaire de surfaces, de dimension r, contenant deux systèmes linéaires partiels $|\overline{F}|$, $|\overline{F'}|$, composés au moyen de l'involution, de dimensions r_1, r_2. On a

$$r_1 + r_2 = r - 1.$$

On peut d'ailleurs supposer que $|\overline{F}|$ n'a pas pour points-base les points unis de l'involution, $|\overline{F'}|$ ayant alors ces points pour points-base.

Soient V une variété image de l'involution, $|F|$, $|F'|$ les systèmes de surfaces homologues de $|\overline{F}|$, $|\overline{F'}|$ sur V. Nous avons établi que $|F'|$ est l'adjoint de $|F|$, ce dernier système étant à son tour l'adjoint de $|F'|$.

Le genre arithmétique des surfaces $\overline{F}$, $\overline{F'}$ est $p_a = r$; celui des surfaces F est $\pi_a = r_2 + 1$ et celui des surfaces F', $\pi'_a = r_1 + 1$. Entre ces genres arithmétiques on a les relations

$$12(p_a + 1) = 24(\pi_a + 1),$$

$$12(p_a + 1) = 24(\pi'_a + 1) - 3\alpha.$$

En additionnant membre à membre et en tenant compte de la relation entre r, r_1, r_2, on a

$$8(r+1) = 8(r_1 + r_2 + 4) - \alpha,$$

d'où $\alpha = \mathbf{16}$.

Une involution du second ordre possédant un nombre fini de points unis, appartenant à une variété algébrique (d'irrégularité superficielle nulle) sur laquelle tout système linéaire de surfaces est son propre adjoint, possède seize points unis. Sur une variété image de cette involution, tout système linéaire de surfaces est distinct de son adjoint mais coïncide avec son biadjoint.

Liége, le 20 janvier 1937.