Extrait du *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége*, Séance du 18 février 1937, n° 2.

Sur les points unis parfaits des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique,

par Lucien GODEAUX,
Membre de la Société.

Dans nos recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique, nous avons été conduit à classer les points unis de ces involutions en deux catégories, suivant la manière dont se comportent les points infiniment voisins d'un tel point. Si F est une surface algébrique sur laquelle une transformation birationnelle T de la surface en elle-même engendre une involution I_p d'ordre premier p, un point uni isolé de cette involution est dit point uni parfait si T opère comme l'identité dans son domaine du premier ordre, point uni non parfait dans le cas opposé.

Construisons sur la surface F un système linéaire transformé en lui-même par T et contenant p systèmes linéaires partiels composés au moyen de l'involution, l'un de ces systèmes étant dépourvu de points-base. Nous démontrons dans cette note que les courbes des p-1 autres systèmes linéaires passent respectivement 1, 2, ..., p-1 fois par un point uni parfait de l'involution (1).

1. Soit F une surface algébrique contenant une involution cyclique I_p, d'ordre premier p supérieur à deux, possédant un nombre fini de points unis dont un point uni parfait A. Nous prendrons comme modèle projectif de la surface F une surface d'ordre pn, de S_r, sur laquelle l'involution I_p est déterminée par une homographie H, cyclique de période p, possédant p axes ponctuels $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, ..., $S^{(p)}$ dont le premier seul rencontre F aux points unis de I_p. Nous désignerons par Σ_1, Σ_2, ..., Σ_p les systèmes d'hyperplans unis de H; les hyperplans de Σ_i passant par tous les axes ponctuels, sauf par $S^{(i)}$.

Le système des sections hyperplanes $|C|$ de F est transformé en lui-même par H et contient p systèmes linéaires partiels $|C_1|$, $|C_2|$, ..., $|C_p|$, composés au moyen de l'involution I_p et découpés sur F par les hyperplans de Σ_1, Σ_2, ..., Σ_p. Les dimen-

(1) Nous renvoyons, pour les propriétés des involutions que nous supposons connues ici, à notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Paris, Hermann, 1935), où l'on trouvera également la bibliographie de la question.

sions r_1, r_2, ..., r_p de ces systèmes sont respectivement les dimensions des axes $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, ..., $S^{(p)}$.

On sait que l'on peut d'ailleurs supposer r et r_1 aussi grands qu'on le veut.

Le point A est simple pour F et le plan tangent à cette surface en ce point ne rencontre $S^{(1)}$ qu'au seul point A.

2. Le système $|C_1|$ est dépourvu de points-base. Nous avons montré que les courbes C_1 assujetties à la seule condition de passer par le point A acquièrent en ce point la multiplicité p, les tangentes à la courbe étant variables.

Considérons les courbes tracées sur F et passant simplement par A. Les tangentes à ces courbes en A engendrent le plan tangent α_1 en ce point à F; les plans osculateurs à ces courbes en A engendrent un espace linéaire α_2 contenant α_1; ...; les espaces S_{p-1} ayant un contact d'ordre p-1 en A avec ces courbes engendrent un espace linéaire α_{p-1} contenant α_{p-2}. Les hyperplans passant par l'espace α_i mais non par l'espace α_{i+1} coupent F suivant des courbes ayant en A la multiplicité $i+1$ et inversement [1].

Le point A étant uni parfait, le plan tangent α_1 à F en A coupe suivant une droite l'un des axes ponctuels de l'homographie H, par exemple l'axe $S^{(2)}$. Dans ce plan, H détermine une homologie de centre A ayant cette droite comme axe.

Les hyperplans de Σ_1 passant par A contiennent l'espace α_{p-1} et celui-ci ne rencontre donc $S^{(1)}$ qu'au seul point A.

3. Les hyperplans de Σ_2, Σ_3, ..., Σ_p contenant $S^{(1)}$ et par suite A, les systèmes $|C_2|$, $|C_3|$, ..., $|C_p|$ ont donc A comme point-base. Désignons par s_2, s_3, ..., s_p les multiplicités de A pour les courbes de ces systèmes.

Le systeme linéaire $|D|=|2C|$ est transformé en lui-même par H; il contient p systèmes linéaires partiels composés au moyen de I_p et l'un d'eux, $|D_1|$, qui contient les courbes $2C_1$, est dépourvu de points-base. Une courbe C_i ($i=2, 3, ..., p$) fait partie de courbes D_1 et les courbes $D_1—C_i$ sont composées au moyen de I_p et d'ailleurs distinctes des courbes C_i. Nous pouvons supposer avoir rangé les systèmes $|C_2|$, $|C_3|$, ..., $|C_p|$ dans un ordre tel que les courbes $D_1—C_i$ soient les courbes C_{p+2-i}. Les courbes C_2+C_p, C_3+C_{p-1}, ... appartiennent donc à $|D_1|$. Comme

[1] Voir C. Segre, *Su una classe di superficie degli iperspazi legata con le equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine* (Atti R. Accad. Torino, 1907, pp. 1047-1079).

elles passent par A et que les courbes D_1 passant par A acquièrent en ce point la multiplicité p, on a

$$s_2 + s_p \geq p, \quad s_3 + s_{p-1} \geq p, \ldots$$

Désignons par $|D_2|$, $|D_3|$, ..., $|D_p|$ les systèmes linéaires partiels composés au moyen de I_p, compris dans $|D|$ et distincts de $|D_1|$. Nous définirons ces systèmes en supposant que $|D_i|$ contient les courbes $C_1 + C_i$; il en résulte que les courbes D_2, D_3, ..., D_p ont respectivement en A les multiplicités s_2, s_3, ..., s_p.

4. Les hyperplans de Σ_2 ne contenant pas le plan tangent α_1 à F en A, les courbes C_2 passent simplement par A ($s_2 = 1$). Les hyperplans des systèmes Σ_3, Σ_4, ..., Σ_p contiennent α_1 et par suite les courbes C_3, C_4, ..., C_p ont en A une multiplicité au moins égale à deux. On a d'ailleurs $s_p \geqslant p$-1.

Les courbes $2C_2$ appartiennent à l'un des systèmes $|D_3|$, $|D_4|$, ..., $|D_p|$, par exemple au premier $|D_3|$. Les courbes D_3 ne peuvent passer simplement par A, car on a $s_3 \geqslant 2$. La multiplicité des courbes $2C_2$ en A est au moins égale à celle des courbes C_3 au même point; on en conclut $s_3 = 2$. L'espace α_2 s'appuie donc sur $S^{(3)}$, car autrement, les courbes C_3 auraient un point au moins triple en A. Il en résulte aussi que les courbes C_4, C_5, ..., C_p ont en A la multiplicité trois au moins.

Cela étant, les courbes $C_2 + C_3$ appartiennent à l'un des systèmes $|D_4|$, $|D_5|$, ..., $|D_p|$, par exemple à $|D_4|$. On en conclut, en raisonnant comme précédemment, que les courbes D_4 et par suite les courbes C_4 ont la multiplicité trois en A ($s_4 = 3$). De plus, l'espace α_3 s'appuie sur $S^{(3)}$ et les nombres s_5, ..., s_p sont au moins égaux à quatre.

Les courbes $C_2 + C_4$ appartiennent par exemple au système $|D_5|$ et on a $s_5 = 4$. En considérant successivement les courbes $C_2 + C_5$, ..., on obtient finalement

$$s_2 = 1, s_3 = 2, s_4 = 3, \ldots, s_p = p - 1.$$

Le plan α_1 s'appuie sur $S^{(2)}$, l'espace α_2 s'appuie sur $S^{(2)}$ et sur $S^{(3)}$, ..., l'espace α_i sur $S^{(2)}$, $S^{(3)}$, ..., $S^{(i+1)}$, ..., l'espace α_{p-1} sur $S^{(2)}$, $S^{(3)}$, ..., $S^{(p)}$. Tous ces espaces s'appuient sur $S^{(1)}$ au seul point A.

5. Soit Φ une surface image de l'involution I_p. Au point uni A correspond sur Φ un point p-uple à cône tangent rationnel équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à une courbe rationnelle de degré —p. Soit γ cette courbe.

Désignons par $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$, ..., $|\Gamma_p|$ les systèmes linéaires de courbes qui correspondent, sur Φ, aux systèmes $|C_1|$, $|C_2|$, ...,

$|C_p|$. En raisonnant comme nous l'avons fait à diverses reprises dans nos recherches sur les involutions, on trouve aisément les relations fonctionnelles suivantes

$$|p\Gamma_1| = |p\Gamma_2 + \gamma + L_2|,$$
$$|p\Gamma_1| = |p\Gamma_3 + 2\gamma + L_3|,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$|p\Gamma_1| = |p\Gamma_p + (p-1)\gamma + L_p|,$$

les courbes L_2, L_3, ..., L_p provenant des autres points de diramation de la surface Φ.

Liége, le 9 février 1937.

M. HAYEZ, Imprimeur de l'Académie royale de Belgique, rue de Louvain, 112, Bruxelles.