Bulletin de la Classe des sciences

Sur les points de diramation isolés d'une variété multiple à trois dimensions

Lucien Godeaux

Résumé
Premières recherches sur la structure des points de diramation isolés des variétés à trois dimensions représentant les groupes d'une involution cyclique d'ordre premier appartenant à une variété algébrique à trois dimensions.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur les points de diramation isolés d'une variété multiple à trois dimensions

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie

Résumé. — Premières recherches sur la structure des points de diramation isolés des variétés à trois dimensions représentant les groupes d'une involution cyclique d'ordre premier appartenant à une variété algébrique à trois dimensions.

Si l'on considère une involution cyclique d'ordre premier appartenant à une surface algébrique F et un point uni isolé de cette involution, simple pour la surface, la transformation birationnelle de F en soi génératrice de l'involution détermine, dans le faisceau des tangentes à F en ce point, soit l'identité, soit une involution binaire, d'où le partage des points unis isolés en deux espèces. De même, s'il s'agit d'une involution cyclique d'ordre premier appartenant à une variété algébrique V à trois dimensions, la transformation birationnelle de V en soi détermine, dans la congruence des tangentes à V en un point uni O isolé, simple pour la variété, soit l'identité, soit une homologie, soit une homographie n'ayant qu'un nombre fini de droites unies. Il y a donc cette fois respectivement trois espèces de points unis. Si Ω est une variété image de l'involution, le point de diramation O′ correspondant à O sera par convention dit de même espèce que O.

Dans notre ouvrage sur les involutions appartenant à une surface algébrique (1), nous avons dans un appendice considéré les involutions

(1) *Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications* (Rome, Éditions Cremonese, 1963).

cycliques d'ordre premier appartenant à une variété algébrique à trois dimensions. Notre but dans cette note et dans celles qui lui feront suite, est de poursuivre cette étude. Nous commencerons par rappeler la construction d'une certaine variété V support de l'involution et de la variété Ω image de l'involution telle que le point de diramation homologue d'un point uni isolé soit lui-même isolé. Nous rappellerons également brièvement la structure d'un point uni isolé de première espèce, déjà déterminée dans notre ouvrage cité. Nous aurons à utiliser les résultats de nos recherches récentes sur la structure des points de diramation isolés des surfaces multiples [1].

1. Soient V une variété algébrique à trois dimensions contenant une involution cyclique I d'ordre premier p, n'ayant qu'un nombre fini de points unis et T la transformation birationnelle de V en soi génératrice de l'involution.

Désignons par $|G_1|$ un système linéaire complet de surfaces dépourvu de points-base et soient $|G_2|, |G_3|, \ldots, |G_p|$ les systèmes linéaires que T et ses différentes puissances lui font correspondre. Le système complet

$$|F| = |G_1 + G_2 + \ldots + G_p|$$

est transformé en soi par T et contient un système linéaire partiel composé au moyen de l'involution I et privé de points-base. Si le système $|F|$ ne contient pas p systèmes appartenant à l'involution I, on peut le remplacer par un de ses multiples suffisamment élevé pour que le nouveau système contienne p systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution, l'un d'eux étant dépourvu de points-base. Nous supposerons ces opérations faites.

Soit r la dimension de $|F|$. Rapportons projectivement les surfaces F aux hyperplans d'un espace linéaire S_r à r dimensions. Il correspond à V une variété que nous désignerons toujours par V et à l'opération T, une homographie H de période p possédant p axes ponctuels $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{p-1}$ de dimensions respectives $r_0, r_1, \ldots, r_{p-1}$. Il existe p systèmes d'hyperplans de S_r, $\Sigma_0, \Sigma_1, \ldots, \Sigma_{p-1}$ qui sont unis pour H les hyperplans de Σ_k passant par les axes de H sauf par ξ_k. Nous désignerons par $|F_k|$ le système des sections de V par les hyperplans

---

[1] *Recherches sur la structure des points de diramation d'une surface algébrique multiple* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1972, pp. 6-22, 158-170, 171-179).

de Σ_k. Le système $| F_0 |$ est privé de points-base. Les points unis de l'involution I appartiennent donc tous à ξ_0. Nous les supposerons simples pour la variété V, ce qui n'est pas une restriction.

Soit O un de ces points unis. L'espace à trois dimensions ρ tangent à V en O est transformé en soi par H. Trois cas peuvent se présenter:

1° H détermine dans la gerbe des tangentes en O à V l'identité. L'espace ρ rencontre suivant un plan l'un des axes de H distincts de ξ_0.

2° H détermine dans la gerbe des tangentes à V en O une homologie. Alors l'espace ρ rencontre en un point l'un des axes de H autres que ξ_0 et suivant une droite un autre de ces espaces.

3° H détermine dans la gerbe des tangentes à V en O unehomographie ayant trois droites unies isolées. L'espace ρ rencontre en un point trois des axes de H distincts de ξ_0.

On a, en correspondance, la définition des points unis de première, seconde, troisième catégorie respectivement.

Rapportons projectivement les surfaces F_0 aux hyperplans d'un espace linéaire à r_0 dimensions. Il correspond à V une variété Ω image de l'involution I.

Nous désignerons par $| \Phi_0 |, | \Phi_1 |, \ldots, | \Phi_{p-1} |$ les systèmes linéaires (complets) de surfaces correspondant respectivement aux systèmes $| F_0 |, | F_1 |, \ldots, | F_{p-1} |$, de sorte que le système des sections hyperplanes de Ω est le système $| \Phi_0 |$.

2. Supposons que O soit un point uni de première espèce et que l'espace ρ tangent à V en O rencontre, pour fixer les idées, l'espace ξ_1 suivant un plan ρ'.

Considérons une surface $\overline{F}_1$ du système $| F_1 |$. Elle est découpée sur V par un hyperplan de Σ_1 ne passant pas par ξ_1 et coupant le plan ρ' suivant une droite r'. Sur cette surface $\overline{F}_1$, l'involution I donne une involution I_1 pour laquelle O est un point uni de première espèce. Appelons F'_0 les surfaces F_0 passant par O et Φ'_0 les surfaces qui leur correspondent sur Ω. Les surfaces F'_0 découpent sur $\overline{F}_1$ des courbes $(\overline{F}_1,F'_0)$ ayant un point multiple d'ordre p en O et des tangentes variables. Désignons par Ω' la projection de la variété Ω à partir du point O' sur une hyperplan ne passant pas par O', et par $\Phi'_1, \Phi'_2, \ldots, \Phi'_{p-1}$ les projections des surfaces $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{p-1}$ sur Ω'. Au domaine du point O dans le plan Or' correspond sur la surface

Φ_1 homologue de $\overline{F}_1$ une courbe rationnelle φ d'ordre p, rencontrée en p points par les surfaces Φ'_0 de Ω'. Les droites projetant de O' la courbe φ sont tangentes en ce point à la variété Ω. Lorsque $\overline{F}_1$ varie, la courbe φ engendre une surface d'ordre p qui est rencontrée par les surfaces Φ'_0 suivant une courbe d'ordre p. Il en résulte que le cône tangent à Ω en O' est d'ordre p^2 et qu'une section hyperplane de ce cône représente les courbes planes d'ordre p du plan ρ'. Cette section est donc une surface de Veronese généralisée.

En un point de diramation de première espèce, la variété Ω a la multiplicité p^2, le cône tangent projetant de ce point une surface de Veronese généralisée.

3. Supposons maintenant que le point O soit de seconde espèce et que l'espace tangent ρ en ce point à V rencontre ξ_1 en un point R et ξ_2 suivant une droite r'.

Une surface F_1 est découpée par un hyperplan ne contenant pas ξ_1 donc R, mais elle a comme plan tangent en O le plan Or'. Sur cette surface, l'involution I donne donc une involution I_1 ayant le point O comme point uni de première espèce.

Une surface F_2 est découpée par un hyperplan contenant le point R et coupant la droite r' en un point R'. Le plan tangent en O est le plan ORR' et l'involution I détermine sur la surface une involution I_2 dont O est un point uni de seconde espèce.

Désignons par x_0, x_1, x_2, x_3 les coordonnées d'un point de l'espace ρ, le point O étant donné par $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Dans cet espace, H détermine une homographie dont les équations peuvent s'écrire

$$x'_0 : x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_0 : \varepsilon x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^\alpha x_3,$$

où ε est une racine primitive d'ordre p de l'unité et α un entier compris entre 1 et p.

Rappelons que si l'on pose $\eta = \varepsilon^\alpha$, les équations de l'homographie précédente peuvent s'écrire

$$x'_0 : x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_0 : \eta^\beta x_1 : \eta^\beta x_2 : \eta x_3,$$

β étant un entier compris entre 1 et p, tel que l'on ait

$$\alpha\beta - 1 \equiv 0, \text{ (mod. } p).$$

Rappelons que nous avons classé les points unis de seconde espèce en trois catégories. Si λ et μ sont deux entiers positifs satisfaisant aux congruences

$$\lambda + \alpha\mu \equiv 0, \mu + \beta\lambda \equiv 0, \pmod{p}$$

tels que la somme $\lambda + \mu$ soit la plus petite possible, on a

$$\lambda + \alpha\mu = hp, \ \mu + \beta\lambda = h'p.$$

Le point O est de première catégorie (pour une surface F_2) si $h = h' = 1$, de seconde catégorie si un seul des nombres h, h' est égal à 'lunité, l'autre étant supérieur à l'unité, de troisième catégorie si h et h' sont supérieurs à l'unité.

Le cône tangent en O' à une surface Φ_2 se scinde en deux, trois ou quatre cônes selon que O est de première, de seconde ou de troisième catégorie.

4. Reprenons une surface $\overline{F}_1$ du système $| F_1 |$. Sur cette surface les surfaces F'_0 découpent des courbes $(\overline{F}_1,F'_0)$ qui ont en O un point multiple d'ordre p à tangentes variables. Aux points du plan Or' infiniment voisins de O correspondent sur la surface Φ'_1 homologue de $\overline{F}_1$ une courbe rationnelle φ d'ordre p. Les droites qui projettent cette courbe du point O' appartiennent au cône tangent à Ω au point O'. Lorsque $\overline{F}_1$ varie, la courbe φ engendre une surface Ψ tracée sur Ω'.

Une surface Φ'_0 rencontre la courbe φ en p points. Projetés de O', ces points donnent p tangentes à la surface Φ'_0, donc celle-ci a la multiplicité p en O'. On en conclut que le cône tangent en O' à une surface Φ_1 rencontre la surface Ψ suivant une courbe d'ordre p. Lorsque la surface Φ_0 varie, cette courbe décrit la surface Ψ qui est par suite d'ordre p.

En un point de diramation de deuxième espèce, il existe un cône d'ordre p faisant partie du cone tangent en ce point à la variété Ω.

5. Supposons maintenant que le point O soit de seconde espèce et de première catégorie, c'est-à-dire que pour les surfaces F_2, il soit de première catégorie.

Considérons une surface $\overline{F}_2$ de $| F_2 |$. Sur cette surface, les courbes $(\overline{F}_2,F'_0)$ ont en O la multiplicité $\lambda + \mu$. Elles passent λ fois par les points $(\beta,1)$, $(\beta,2)$, ..., $(\beta,\alpha - 1)$ et μ fois par les points $(\alpha,1)$, $(\lambda,2)$, ..., $(\alpha,\beta - 1)$. Le point $(\alpha,1)$ est infiniment voisin de O sur la droite OR et $(\beta,1)$ est infiniment voisin de O sur la droite OR′. Les points $(\alpha,\beta - 1)$ $(\beta,\alpha - 1)$ sont unis de première espèce pour l'involution I_2 déterminée par I sur la surface $\overline{F}_2$.

Sur la surface Φ'_2 homologue de $\overline{F}_2$ il correspond au domaine de $(\alpha,\beta - 1)$ une courbe φ_2 d'ordre μ et au domaine de $(\beta,\alpha - 1)$, une courbe φ'_2 d'ordre λ. Les droites projetant ces courbes de O′ sont tangentes à Ω en ce point. On en conclut qu'une surface Φ'_2 a en O′ un point multiple en lequel les tangentes forment deux cônes, l'un d'ordre λ, l'autre d'ordre μ. Le point O′ est donc multiple d'ordre $\lambda + \mu$ pour les surfaces Φ'_2.

Lorsque la surface $\overline{F}_2$ varie, la courbe φ_2 engendre une surface Ψ_2 et la courbe φ'_2 une surface Ψ'_2. Sur la surface Φ_2, les courbes φ_2 et φ'_2 se rencontrent en un point, donc les surfaces Ψ_2 et Ψ_2 ont une courbe en commun.

Les cônes projetant Ψ_2 et Ψ'_2 du point O′ font partie du cône tangent à Ω en ce point.

Soit P un point infiniment voisin du point O situé sur la droite OR′.

Pour l'involution I_2 sur la surface $\overline{F}_2$, P est un point uni de seconde espèce (sauf si $\alpha = 2$, où il est un point uni de première espèce). Le point P se confond avec le point $(\beta,1)$ considéré plus haut.

Par la surface $\overline{F}_1$, le point P est, pour l'involution I_1, un point uni de première espèce.

Il en résulte que pour l'involution I, le point P est un point uni de seconde espèce. Si l'on considère une transformée birationnelle de V sur laquelle au point P correspond un point proprement dit, celui-ci est un point uni de deuxième espèce, analogue au point O considéré dans ce paragraphe.

Les points infiniment voisins de O situés dans le plan Or' sont des points unis de deuxième espèce pour l'involution I.

En résumé, on voit que:

En un point diramation de deuxième espèce et de première catégorie, le cône tangent à la variété Ω se scinde en trois parties dont l'une est un cône d'ordre p.

Nous avons rappelé que $\alpha\beta - 1$ est multiple de p. Si nous posons

$$\alpha\beta - 1 = kp,$$

nous avons

$$\lambda = (\alpha - 1) : k, \mu = (\beta - 1) : k.$$

6. Supposons que le point O soit uni de deuxième espèce mais de seconde catégorie. Si λ, μ sont les entiers positifs tels que l'on ait

$$\lambda + \alpha\mu \equiv 0, \mu + \beta\lambda \equiv 0, \text{ (mod. } p)$$

la somme $\lambda + \mu$ étant la plus petite possible, deux cas peuvent se présenter suivant que l'on a

$$\lambda + \alpha\mu = hp, \mu + \beta\lambda = p \quad (h > 1) \tag{1}$$

ou

$$\lambda + \alpha\mu = p, \mu + \beta\lambda = hp. \quad (h > 1). \tag{2}$$

Envisageons la première hypothèse. Rappelons que si l'on pose $p = a\beta + b$, $(b < \beta)$, on a $\lambda = a$, $\mu = b$.

Considérons une surface $\overline{\mathrm{F}}_2$ de $| \mathrm{F}_2 |$ et les courbes découpées sur cette surface par les surfaces F'_0, c'est-à-dire par les surfaces F_0 qui passent par O. Les courbes $(\overline{\mathrm{F}}_2,\mathrm{F}'_0)$ ont en O la multiplicité $a + b$ et passent par une série de points infiniment voisins successifs de O.

Une suite de points $(\beta,1), (\beta,2), \ldots, (\beta,\alpha - 1)$ multiples d'ordre a, le premier se trouvant sur la droite OR′ et le dernier étant uni de première espèce pour l'involution I_2 déterminée par I sur $\overline{\mathrm{F}}_2$.

Une suite de points $(\alpha,1), (\alpha,2), \ldots, (\alpha,x)$ multiples d'ordre b, un point $(\alpha,x + 1)$ multiple d'ordre y et des points $(\alpha,x + 2), \ldots, (\alpha,\beta - 1)$ multiples d'ordre a', où a' est le quotient de la division de p par α. Le premier point est situé sur la droite OR et le dernier est un point uni de première espèce pour I_2.

En outre, les courbes $(\overline{\mathrm{F}}_2,\mathrm{F}'_0)$ passent par une suite de points unis, multiples d'ordre m, infiniment voisins successifs du point $(\alpha,x + 1)$, le dernier A de ces points étant uni de première espèce pour I_2. Le nombre m est le plus grand commun diviseur de $b - y$ et de $y - a'$.

Aux domaines des points $(\beta,\alpha - 1)$, A, $(\alpha,\beta - 1)$ correspondent sur la surface Φ_2 homologue de $\overline{\mathrm{F}}_2$ des courbes φ_2, τ et φ'_2 respectivement d'ordres b, m, a'. Lorsque $\overline{\mathrm{F}}_2$ varie, ces courbes engendrent des surfaces Ψ_2, Θ, Ψ'_2 respectivement d'ordres b, m, a' et les droites qui projettent ces surfaces du point O′ font partie du cône tangent à Ω en ce point.

Les surfaces F'_0 découpent sur une surface F_1 des courbes ayant un point multiple d'ordre p en O, à tangentes variables, car sur cette surface F_1, l'involution I détermine une involution I_1 pour laquelle O est un point uni de première espèce.

En raisonnant comme dans le cas précédent, on voit les points de

V infiniment voisins de O dans le plan Or' sont pour l'involution I des points unis de première espèce et qu'il leur correspond sur la variété Ω' une surface d'ordre p. Le cône projetant cette surface du point O' est tangent en ce point à la variété Ω.

On voit donc que le cône tangent à la variété Ω en O' se scinde en quatre parties.

7. Envisageons la seconde hypothèse. Rappelons que si l'on pose $p = a'\alpha + b'$, on a $\lambda = b'$, $\mu = a'$.

La question se traite d'une manière analogue à la précédente.

Sur une surface $\overline{F}_2$, l'involution I_2 induite par I, dont le point O est uni de deuxième espèce et de seconde catégorie, les surface F'_0 découpent des courbes $(\overline{F}_2,F'_0)$ ayant la multiplicité $a' + b'$ en O et passant par un certain nombre de points unis infiniment successifs de O:

Une suite de points $(\alpha,1), (\alpha,2), \ldots, (\alpha,\beta - 1)$ multiples d'ordre a' dont le premier $(\alpha,1)$ se trouve sur la droite OR et le dernier est uni de première espèce pour l'involution I_2.

Une suite de points $(\beta,1), (\beta,2), \ldots, (\beta,x')$ multiples d'ordre b', un point $(\beta,x' + 1)$ multiple d'ordre y', des points $(\beta,x' + 2), \ldots, (\beta,\alpha - 1)$ multiples d'ordre a, ce nombre étant le quotient de la division de p par β.

Une suite de points infiniment voisins successifs du point $(\beta,x' + 1)$, se terminant à un point A', multiple d'ordre m', ce nombre étant le plus grand commun diviseur de $b' - y'$ et de $y' - a$.

Aux domaines des points $(\alpha,\beta - 1)$, A', $(\beta,\alpha - 1)$ correspondent sur la surface Φ'_2 homologue de $\overline{F}_2$ des courbes φ'_2, τ, φ_2 respectivement d'ordres a', m', a.

Lorsque la surface $\overline{F}_2$ varie, ces courbes engendrent des surfaces Ψ_2, Θ, Ψ'_2 tracées sur la variétés Ω'. Les cônes projetant ces surfaces du point O' font partie du cône tangent en ce point à Ω.

Les points du plan Or' infiniment voisins de O sont unis de première espèce pour l'involution I et il existe. sur la variété Ω', une surface Ψ d'ordre p, correspondant à ces points. Le cône projetant cette surface de O' est tangent en ce point à la variété.

On peut voir que l'on a

$$\lambda = (h\alpha - 1) : k, \mu = (\beta - h) : k.$$

En résumé, dans les deux hypothèses, on a le résultat suivant:

En un point de diramation de seconde espèce et de deuxième catégorie, le cône tangent à la variété Ω se scinde en quatre cônes dont l'un est d'ordre p.

8. Il nous reste à examiner le cas où le point O appartient à la troisième catégorie, c'est-à-dire où l'on a

$$\lambda = \alpha\mu = hp, \mu + \beta\lambda = h'p \ (h > 1, h' > 1).$$

Reportons-nous à la surface $\overline{F}_2$ de $| F_2 |$ sur laquelle l'involution I_2 déterminée par I possède en O un point uni de seconde espèce et de troisième catégorie.

Sur $\overline{F}_2$, les surface F'_0 découpent des courbes $(\overline{F}_2, F'_0)$ ayant la multiplicité $\lambda + \mu$ en O et passant par un certain nombre de points unis infiniment voisins successifs de O:

Les points $(\alpha,1), (\alpha,2), \ldots, (\alpha,x)$ multiples d'ordre λ, un point $(\alpha,x + 1)$ multiple d'ordre y, des points $(\alpha,x + 2), \ldots, (\alpha,\beta - 1)$ d'une certaine multiplicité a. Une suite de points infiniment voisins successifs de $(\alpha,x + 1)$ d'une certaine multiplicité m dont le dernier A est uni de première espèce pour I_2. Les points $(\beta,1), (\beta,2), \ldots, (\beta,x')$ multiples d'ordre μ, un point $(\beta,x' + 1)$ multiple d'ordre y', des points $(\beta,x' + 2), \ldots, (\beta,\alpha - 1)$ multiples d'ordre b. Une suite de points infiniment voisins successifs de $(\beta,x' + 1)$ d'un certain ordre m' dont le dernier A' est uni de première espèce pour I_2.

On a d'ailleurs

$$\lambda = a + (H + H')m, y = a + H'm,$$

$$\mu = b + (K + K')m', y' = b + K'm',$$

où H, H', K, K' sont des entiers positifs (¹).

Les points $(\alpha,\beta - 1), (\beta,\alpha - 1)$, A' sont unis de première espèce pour l'involution I_2. A leurs domaines correspondent sur la surface Φ'_2 homologue de $\overline{F}_2$ des courbes $\varphi_2, \tau, \varphi'_2, \tau'$ respectivement d'ordres a, m, b, m'. Lorsque la surface $\overline{F}_2$ varie, ces courbes engendrent des surfaces $\Psi_2, \Theta, \Psi'_2, \Theta'$ d'ordres a, m, b; m'. Les cônes projetant ces surfaces du point O' font partie du cône tangent à Ω en ce point.

(¹) Les nombres x, x^1 se déterminent en exprimant que les sommes des multiplicités des courbes en 0, $(\alpha,1), \ldots, (\alpha,\beta - 1)$ et en 0, $(\beta,1), \ldots, (\beta,\alpha - 1)$ sont égales à p. Nous renvoyons sur ces points à notre troisième note sur la structure des points de diramation d'une surface multiple, citée plus haut (n° 2).

Aux points infiniment voisins de O dans le plan Or' correspond dans Ω' une surface Ψ d'ordre p. Les droites projetant les points de cette surface de O' sont trangentes en ce point à Ω.

En un point de diramation de deuxième espèce et de troisième catégorie, le cône tangent à Ω se scinde en cinq parties dont l'une est un cône d'ordre p.

9. Remarque. Ce qui précède est une première contribution à l'étude des points de diramation isolés d'une variété algébrique à trois dimensions multiple d'ordre premier. Les cônes qui forment le cône tangent à la variété Ω au point O' ont des droites en commun. Il faudrait étudier de plus près les surfaces sections de ces cônes par l'hyperplan contenant la variété Ω'. C'est le même processus que nous avons suivi dans l'étude analogue concernant les surfaces multiples. Nous espérons pouvoir revenir sur ces points.

Liège, le 28 août 1972.

Erratum. Bulletin 1971, p. 1099, ligne 18, lire:

les courbes C^1 ont en O la multiplicité cinq
au lieu de
les courbes C^1 ont en O la multiplicité trois.