EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liège*, N° 5, 1936.

Sur une surface de genres un et de rang trois,

par LUCIEN GODEAUX, Membre de la Société.

Dans nos recherches antérieures, nous avons indiqué sous quelles conditions une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$) est de rang trois, c'est-à-dire est l'image d'une involution d'ordre trois appartenant à une surface de genres un ([1]).

Nous avons précisément montré qu'une surface de genres un et de rang trois peut toujours se ramener, par une transformation birationnelle, à une surface Φ, d'ordre $2\pi-2$, à sections hyperplanes de genre π, appartenant à un espace linéaire S_π à π dimensions, possédant six points doubles biplanaires ordinaires. De plus, il existe sur Φ deux systèmes linéaires de courbes de genre $\pi-2$ et d'ordre $2\pi-2$, le long de chacune desquelles une certaine hypersurface, passant par les six points doubles, oscule la surface Φ. Désignons par C les sections hyperplanes de Φ, par C_1, C_2 les courbes des deux systèmes linéaires dont il vient d'être question. Un point double biplanaire équivaut, au point de vue des transformations birationnelles, à l'ensemble de deux courbes rationnelles de degré -2 se coupant en un point. Si nous désignons par γ_{1i}, γ_{2i} les courbes rationnelles équivalentes au i-ième point double biplanaire de Φ, nous avons les relations

$$\begin{aligned} 3C &\equiv 3C_1 + 2\Sigma\gamma_{1i} + \Sigma\gamma_{2i}, \\ 3C &\equiv 3C_2 + 2\Sigma\gamma_{2i} + \Sigma\gamma_{1i}. \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6)$$

Nous avons construit la surface Φ lorsque c'est un plan double ([2]) ou une surface du quatrième ordre ([3]). Nous nous proposons, dans cette note, de construire une surface Φ dans l'espace à quatre dimensions ($\pi = 4$); cette surface possède cette particularité que les courbes C_1, C_2, qui sont actuellement de genre deux, forment des réseaux composés au moyen de la même involution.

---

(1) Mémoire sur les involutions appartenant à une surface de genres un. (*Annales de l'École normale supérieure*, 1914, pp. 357-430; 1919, pp. 51-70.)

(2) Sur les plans doubles de genres un et de rang trois (*Annaes da Academia polytechnica do Porto*. 1921, pp. 15-23). Construction d'un plan double de genres un et de rang trois (*Bull. de la Soc. roy. des Sc. de Liège*, 1932, pp. 64-66).

(3) Sur les surfaces du quatrième ordre possédant six points doubles biplanaires ordinaires. (*Bull. de l'Ac. roy. de Belgique*, 1922, pp. 443-456.)

1. Désignons, dans un espace linéaire S_{10} à dix dimensions, par X_0, X_{111}, X_{112}, X_{113}, X_{221}, X_{222}, X_{223}, X_{331}, X_{332}, X_{333}, X_{123} les coordonnées projectives de points, et considérons la surface F donnée par les équations

$$\rho X_{ikl} = x_i x_k x_l, \qquad (i, k, l = 1, 2, 3) \quad (1)$$

$$X_0^2 \alpha_0 + X_0 \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \quad (2)$$

où les α sont des formes en X_{ikl} dont le degré est indiqué par l'indice.

En interprétant les x comme coordonnées des points d'un plan ϖ, on voit que les équations (1) représentent le cône projetant du point O_0 (1, 0, ..., o) la surface Ψ obtenue en rapportant projectivement les cubiques du plan ϖ aux hyperplans de l'espace $X_0 = o$. Les équations de ce cône V_3^9 peuvent s'écrire en exprimant que tous les mineurs de la matrice

$$\left\| \begin{matrix} X_{111} & X_{221} & X_{331} & X_{112} & X_{113} & X_{123} \\ X_{112} & X_{222} & X_{332} & X_{221} & X_{123} & X_{223} \\ X_{113} & X_{223} & X_{333} & X_{123} & X_{331} & X_{332} \end{matrix} \right\| \quad (3)$$

sont nuls.

La surface F est de genres un ($p_a = P_4 = 1$), elle est en effet birationnellement équivalente au plan double de support ϖ dont la courbe de diramation, du sixième ordre, a pour équation

$$\alpha_1^2 - 4\alpha_0\alpha_2 = 0,$$

les α étant, par l'intermédiaire des formules (1), des formes en x_1, x_2, x_3.

2. Considérons l'homographie H, cyclique de période trois, d'équations

$$\frac{X'_0}{X_0} = \frac{X'_{111}}{X_{111}} = \frac{X'_{222}}{X_{222}} = \frac{X'_{333}}{X_{333}} = \frac{X'_{123}}{X_{123}}$$

$$= \frac{X'_{112}}{\varepsilon X_{112}} = \frac{X'_{223}}{\varepsilon X_{223}} = \frac{X'_{331}}{\varepsilon X_{331}} = \frac{X'_{113}}{\varepsilon^2 X_{113}} = \frac{X'_{221}}{\varepsilon^2 X_{221}} = \frac{X'_{332}}{\varepsilon^2 X_{332}},$$

où ε est une racine cubique primitive de l'unité. Le cone V_3^9 est transformé en lui-même par H et pour que la surface F possède la même propriété, il suffit de prendre, pour équation (2), une équation de la forme

$$X_0^2\alpha_0 + X_0\alpha_1(X_{111}, X_{222}, X_{333}, X_{123}) + \alpha_2(X_{111}, X_{222}, X_{333}, X_{123}) = 0. \quad (4)$$

La surface F ainsi obtenue est la plus générale possédant la propriété indiquée. Sur F, l'homographie H engendre une involution I_3, d'ordre trois, possédant six points unis situés deux par deux sur les droites $O_0\,O_{111}$, $O_0\,O_{222}$, $O_0\,O_{333}$ (O_{ikl} étant le point de S_{10} dont toutes les coordonnées sont nulles sauf X_{ikl}).

Observons d'ailleurs que la surface F est birationnellement équivalente au plan double dont la courbe de diramation est

$$[\alpha_1(x_1^3, x_2^3, x_3^3, x_1x_2x_3)]^2 - 4\alpha_0\alpha_2(x_1^3, x_2^3, x_3^3, x_1x_2x_3) = 0.$$

Sur ce plan double, l'involution I_3 est déterminée par l'homographie

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^2 x_3.$$

La surface F contient trois systèmes linéaires partiels de sections hyperplanes composés au moyen de I_3; ils sont respectivement découpés par les hyperplans

$$\lambda_0 X_0 + \lambda_1 X_{111} + \lambda_2 X_{222} + \lambda_3 X_{333} + \lambda_4 X_{123} = 0, \tag{5}$$

$$\lambda_1 X_{112} + \lambda_2 X_{223} + \lambda_3 X_{331} = 0, \tag{6}$$

$$\lambda_1 X_{113} + \lambda_2 X_{221} + \lambda_3 X_{332} = 0. \tag{7}$$

3. Pour obtenir un modèle projectif de la surface Φ, image de l'involution I_3, rapportons projectivement les hyperplans (5) à ceux d'un espace linéaire S_4. Pour abréger les écritures, posons $X_1 = X_{111}$, $X_2 = X_{222}$, $X_3 = X_{333}$, $X_4 = X_{123}$. Les équations de la surface Φ sont

$$X_1 X_2 X_3 = X_4^3, \tag{8}$$

$$X_0^2\alpha_0 + X_0\alpha_1(X_1, X_2, X_3, X_4) + \alpha_2(X_1, X_2, X_3, X_4) = 0. \tag{9}$$

L'équation (8) représente le cône projetant de O_0 une surface cubique de l'hyperplan $X_0 = 0$, ayant des points doubles biplanaires ordinaires en O_1, O_2, O_3. Il en résulte que la surface Φ possède six points doubles biplanaires ordinaires, situés dans l'hyperplan $X_4 = 0$, à l'intersection des droites $X_2 = X_3 = 0$, $X_3 = X_1 = 0$, $X_1 = X_2 = 0$ et de la variété (9).

Les systèmes $|C_1|$, $|C_2|$ correspondent sur la surface Φ aux courbes découpées sur F par les hyperplans (6), (7). Ces systèmes sont découpés sur Φ par les hypersurfaces

$$\lambda_1 X_{111} X_{222} + \lambda_2 X_{222} X_{123} + \lambda_3 X_{123}^2 = 0,$$
$$\lambda_1 X_{111} X_{333} + \lambda_2 X_{123}^2 + \lambda_3 X_{333} X_{123} = 0.$$

4. Rapportons projectivement les courbes du réseau $|C_1|$ aux droites d'un plan en posant

$$y_1 : y_2 : y_3 = X_{112} : X_{223} : X_{331}.$$

On trouve aisément

$$X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = y_1^2 y_3 : y_2^2 y_1 : y_3^2 y_2 : y_1 y_2 y_3.$$

A la surface Φ correspond un plan double dont la courbe de diramation, du sixième ordre, a pour équation

$$\left.\begin{aligned} &[\alpha_1(y_1^2y_3, y_2^2y_1, y_3^2y_2, y_1y_2y_3)]^2 \\ &- 4\alpha_0\alpha_2(y_1^2y_3, y_2^2y_1, y_3^2y_2, y_1y_2y_3) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Aux courbes C_2 correspondent, sur ce plan double, les coniques doubles

$$\lambda_1 y_1 y_3 + \lambda_2 y_1 y_2 + \lambda_3 y_2 y_3 = 0.$$

Les réseaux $|C_1|$, $|C_2|$ sont donc bien composés au moyen de la même involution.

Observons que la courbe (10) possède trois tacnodes aux sommets du triangle de référence.

Liége, le 19 avril 1936.

Marcel HAYEZ, imprimeur de l'Académie royale de Belgique, rue de Louvain, 112, Bruxelles