Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences).
Séance du 5 décembre 1936, n° 12.

Sur une surface canonique appartenant à la variété de Segre représentant les couples de points de deux plans,

par Lucien GODEAUX,
Correspondant de l'Académie.

Des recherches récentes nous ont conduit à considérer certaines surfaces tracées sur les variétés de C. Segre. Nous nous proposons, dans cette courte note, d'indiquer la construction d'une surface canonique tracée sur une de ces variétés. Nous établirons le théorème suivant : *L'intersection de la variété de Segre* V_4^6 *de l'espace* S_8 *et d'une hypersurface cubique* V_7^3 *est une variété à trois dimensions à surfaces canonique et pluricanoniques d'ordre zéro; ses sections hyperplanes sont donc des surfaces canoniques.*

1. Soit, dans un espace linéaire S_8 à huit dimensions, V_4^6 la variété normale de C. Segre [1] représentant les couples de points de deux plans ϖ_1, ϖ_2. Les points de V_4^6 qui représentent les couples de points de ϖ_1, ϖ_2 ayant un point fixe dans ϖ_1 (ou dans ϖ_2) forment un plan σ_1 (ou σ_2). Les plans σ_1 (ou σ_2) forment, sur V_4^6, une congruence linéaire Σ_1 (ou Σ_2). Deux plans σ_1 (ou σ_2) ne peuvent se rencontrer. Un plan σ_1 rencontre toujours un plan σ_2 en un point.

Considérons l'intersection de V_4^6 avec une hypersurface

[1] Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi. (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1891, pp. 192-204.)

cubique V_7^3: c'est une variété algébrique à trois dimensions V_3^{18}, d'ordre dix-huit.

Les plans σ_1 coupent V_7^3 suivant les cubiques planes C_1 formant, sur V_3^{18}, une congruence linéaire. De même les plans σ_2 découpent sur V_7^3 des cubiques planes C_2 formant également une congruence linéaire sur V_3^{18}. Les courbes C_1, C_2 sont unisécantes.

Soit p_1 une droite de ϖ_1. Les couples de points de p_1, ϖ_1 forment une variété V_3^3, à trois dimensions, d'ordre trois, située dans un espace linéaire S_5 et appartenant à V_4^6. Cette variété V_3^3 coupe V_7^3 suivant une surface Φ_1, d'ordre neuf, contenant un faisceau de courbes C_1. Lorsque p varie dans ϖ_1, la surface Φ_1 décrit un réseau $|\Phi_1|$.

Deux surfaces de ce réseau ont en commun une courbe C_1.

En intervertissant les rôles de ϖ_1, ϖ_2, on obtient de même un réseau de surfaces $|\Phi_2|$, d'ordre neuf, deux surfaces de ce réseau ayant en commun une courbe C_2.

2. Reprenons la variété V_3^3 représentant les couples de points de la droite p_1 et du plan ϖ_2. Si p_2 est une droite de ϖ_2, les couples de points des droites p_1, p_2 sont représentés, sur V_3^3, par les points d'une quadrique Q_1 qui, lorsque p_2 varie, engendre un réseau $|Q_1|$. La variété V_3^3 contient ∞^1 plans σ_1 et un hyperplan contenant un plan σ_1 de V_3^3 coupe encore cette variété suivant une quadrique Q_1.

Les quadriqnes Q_1 sont coupées par la variété V_7^3 suivant des courbes Γ d'ordre six et de genre quatre, dont les sections hyperplanes sont les groupes canoniques (1). Il en résulte que, sur une surface Φ_1, on a

$$|\Gamma'| = |\Gamma + C_1|.$$

Par suite les courbes canoniques d'une surface Φ_1 sont les courbes C_1 situées sur cette surface.

(1) Il est facile de voir qu'une surface Φ_1 et une surface Φ_2 ont en commun une courbe Γ.

Il en résulte que les adjointes d'une surface Φ_1 sont les autres surfaces du réseau $|\Phi_1|$. On a

$$|\Phi_1'| = |\Phi_1|$$

et de même

$$|\Phi_2'| = |\Phi_2|.$$

Par conséquent, la variété V_3^{18} possède une surface canonique d'ordre zéro. On voit d'ailleurs aisément que les surfaces pluricanoniques de V_3^{18} sont aussi d'ordre zéro.

3. Désignons par F les sections hyperplanes de V_3^{18}. Le système $|F|$ est, d'après ce qui précède, son propre adjoint. Il en résulte que le système des sections hyperplanes d'une surface F est le système canonique de cette surface. En d'autres termes les surfaces F sont des surfaces canoniques [1].

Les surfaces F ont les genres

$$p^{(1)} = 19, \qquad p_a = p_g = 8.$$

On a d'ailleurs

$$|F| = |\Phi_1 + \Phi_2|.$$

Liége, le 30 novembre 1936.

---

(1) On pourrait également démontrer que la section de V_4^6 par une hypersurface V_7^4 du quatrième ordre est une variété V_3^{24} dont le système canonique est formé par les sections hyperplanes. Plus généralement, si l'on considère la section de V_4^6 par une hypersurface V_7^n d'ordre n, on obtient une variété à trois dimensions V_3^{6n} sur laquelle les hypersurfaces d'ordre n-2 découpent des surfaces du système canonique de la variété.