Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences).
Séance du 7 mars 1936, n° 3.

Sur les surfaces algébriques possédant un système linéaire simple, dont les courbes contiennent une involution,

par LUCIEN GODEAUX, Correspondant de l'Académie.

M. Castelnuovo a démontré que *si une surface algébrique contient un réseau simple de courbes hyperelliptiques de genre* p, *cette surface est rationnelle ou référable à une réglée de genre* p (1). Dans un travail antérieur (2), nous avons cherché à étendre le théorème de M. Castelnuovo aux surfaces contenant un système linéaire simple, de dimension n, dont chaque courbe contient une involution d'ordre n et de genre π. Nous allons reprendre ces recherches pour en préciser le résultat. Précisément, nous établirons le théorème suivant :

Si une surface algébrique contient un système linéaire simple, de dimension n, *de courbes de genre* p *possédant chacune une involution non composée d'ordre* n *et de genre* π, *les involutions appartenant à deux courbes distinctes n'ayant, en général, aucun groupe commun, la surface est rationnelle ou référable, par une transformation birationnelle, à une réglée de genre* p *ou* π.

1. Soit F une surface algébrique contenant un système linéaire $|C|$, simple, de degré m et de dimension $n > 2$, de genre p, chaque courbe C possédant une involution γ_n^1 d'ordre n et de genre π, non composée au moyen d'une autre involution. Supposons de plus que les involutions γ_n' appartenant à deux

(1) Su le superficie che contengono une rete di curve iperellittiche. (*Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, 1re série, 1849.)

(2) Sur les surfaces algébriques possédant un système simple dont les courbes contiennent une involution. (*Bulletin de la Société mathématique de France*. 1920, pp. 9-13.)

courbes C distinctes n'aient pas, en général, un groupe commun.

En rapportant projectivement les courbes de $|C|$ aux hyperplans d'un espace linéaire S_n à n dimensions, F se transforme en une surface simple que nous désignerons encore par F et sur laquelle nous raisonnerons désormais. Un groupe de n points appartenant à une série γ'_n d'une courbe C, détermine, en général, l'hyperplan qui le contient et par suite la courbe C à laquelle il appartient.

Considérons les courbes C passant par un point quelconque P de la surface F. Sur chacune de ces courbes se trouve déterminé un groupe de la série γ'_n correspondante, contenant P. En défalquant P de ces groupes, on obtient ∞^{n-1} groupes de $n-1$ points formant une variété V_P. Deux cas peuvent se présenter :

a) Les groupes de V_P sont situés sur une courbe Γ_P, nécessairement algébrique;

b) Les groupes de V_P remplissent toute la surface.

Dans le premier cas, à chaque point P est associée une courbe Γ_P. Trois hypothèses peuvent être faites :

1° Lorsqu'un point Q décrit une courbe Γ_P, la courbe Γ_Q correspondante coïncide toujours avec Γ_P;

2° Les courbes Γ_Q correspondant aux points Q d'une courbe Γ_P coïncident en une courbe distincte de Γ_P;

3° Les courbes Γ_Q correspondant aux points Q d'une courbe Γ_P varient avec le point Q.

Nous examinerons successivement ces différents cas.

2. Supposons en premier lieu qu'à chaque point P soit associée une courbe Γ_P coïncidant avec les courbes Γ_Q associées aux différents points Q de Γ_P.

Dans ces conditions, la courbe Γ_P a nécessairement un point simple en P. Elle est de plus rencontrée en n points par toute courbe C; elle est donc d'ordre n. D'autre part, par un point quelconque de F ne peut passer qu'une courbe telle que Γ_P. Les ∞^1 courbes Γ_P forment donc un faisceau $\{\Gamma\}$, de genre π.

Si les courbes Γ appartenaient à des espaces linéaires de dimension inférieure à n, deux courbes C auraient en commun un groupe de n points appartenant aux séries γ'_n qu'elles possèdent, contrairement à l'hypothèse. Il en résulte que les courbes C découpent sur toute courbe Γ une série linéaire g_n^n d'ordre et de dimension n; les courbes Γ sont donc rationnelles et la surface F peut se ramener, par une transformation birationnelle, à une réglée de genre π.

3. Supposons qu'à chaque point P de F soit associée une courbe Γ_P et que les courbes associées aux différents points Q de Γ_P coïncident en une courbe unique Γ_Q distincte de Γ_P.

Si les courbes Γ , Γ_Q sont irréductibles, comme elles appartiennent à la même famille, elles sont d'un même ordre μ. Une courbe C ne passant pas par P coupe Γ_P en μ points; chacun de ces points détermine un groupe de n points de la série γ'_n correspondante, dont $n-1$ points appartiennent à Γ_Q. Les courbes C rencontrent donc Γ_Q en $\mu(n-1)$ points au moins et l'on a $\mu(n-1) \leq \mu$, d'où $n = 2$, contrairement à l'hypothèse. Par conséquent, les courbes Γ_P, Γ_Q sont réductibles.

Soit Γ'_p une partie irréductible de Γ_P. Puisque Γ_P et Γ_Q appartiennent à la même famille, la courbe Γ_Q contiendra une partie irréductible Γ'_Q appartenant à la même famille que Γ'_P et ces deux courbes auront le même ordre μ', Cela étant, si nous considérons une courbe C ne passant pas par P, le groupe de la série γ'_n de cette courbe contenant un point appartenant à Γ'_P aura un certain nombre n' de ses points sur Γ'_Q, et ce nombre ne variera pas lorsque la courbe C variera. Il en résulte qu'une courbe C rencontre Γ'_Q en $\mu' n'$ points au moins et que l'on a $\mu' n' \leq \mu'$, d'où $n' = 1$. On voit de plus que la courbe Γ'_Q ne passe pas par le point Q auquel elle est associée.

Le même raisonnement pouvant être tenu pour chacune des parties de Γ_P, on voit que la courbe Γ_P ne passe pas par P, mais que la courbe Γ_Q passe par P.

Supposons que ce soit précisément Γ'_Q la composante (ou une des composantes) de Γ_Q qui passe par P. Alors, la courbe Γ_P relative aux points P de Γ'_Q contient Γ'_P comme partie.

Si les courbes Γ'_P, Γ'_Q avaient un point commun M, la courbe Γ_M comprendrait donc comme parties les courbes Γ'_P, Γ'_Q, ce qui est impossible, puisque Γ_M ne passe pas par M. Il en résulte que les courbes Γ'_P, Γ'_Q appartiennent à un même faisceau $\{\Gamma\}$. Mais alors, ou bien les courbes Γ découpent sur une courbe C une série au moyen de laquelle la série γ'_n de cette courbe est composée, contrairement à l'hypothèse, ou bien les courbes Γ sont des droites et la surface F est réglée de genre p.

D'une manière précise, F est une réglée de genre p contenant une série γ'_n de genre π dont les groupes sont formés de n génératrices. Par un point P passe une droite de F déterminant un de ces groupes et la courbe Γ_P est formée des $n - 1$ génératrices complétant ce groupe. Si Q est un point d'une de ces droites, la courbe Γ_Q est formée des $n - 1$ autres droites du groupe. Les courbes Γ_P, Γ_Q ont en commun $n - 2$ droites.

On observera que nous n'avons pas fait usage ici du fait que les séries γ'_n appartenant à deux courbes C distinctes, n'ont aucun groupe commun.

4. Supposons maintenant qu'à chaque point P de F soit associée une courbe Γ_P, mais que la courbe Γ_Q associée à un point Q de Γ_P varie avec ce point.

Puisque les séries γ'_n appartenant à des courbes C distinctes ne peuvent avoir un groupe commun, les courbes C passant par P découpent, sur Γ_P, une série linéaire g^{n-1}_{n-1} d'ordre et de dimension $n - 1$; la courbe Γ_P est donc rationnelle.

La surface F contient ∞^2 courbes rationnelles et par suite, d'après un théorème de M. Castelnuovo, elle est rationnelle.

5. Supposons enfin que la variété V_p remplisse toute la surface.

Considérons un faisceau de courbes C passant par un point P de F. Les groupes des séries γ'_n de ces courbes contenant P engendrent une courbe Γ ayant une certaine multiplicité ν en P et qui est donc d'ordre $n + \nu - 1$. Toute courbe C passant par P coupe la courbe Γ en $n - 1$ points en dehors de P. La courbe Γ contenant une série g_{n-1}^{n-1} est rationnelle. Les courbes Γ construites en partant d'un point P de F sont en nombre infini et par suite, la surface F contient au moins ∞^3 courbes rationnelles. Elle est donc rationnelle d'après le théorème de M. Castelnuovo.

6. Le théorème énoncé au début de cette note est démontré pour $n > 2$. Pour $n = 2$ et $\pi = 0$, il se réduit au théorème de M. Castelnuovo. Supposons $n = 2$, $\pi > 0$ et observons que dans ce qui précède nous avons invoqué deux fois l'hypothèse $n > 2$. Une première fois pour transformer F en une surface dont les sections hyperplanes sont les courbes C (ce qui n'est d'ailleurs pas essentiel, mais simplifie le langage), une seconde fois dans les développements du paragraphe 3. Reprenons nos raisonnements dans le cas d'une surface F quelconque sur laquelle existe un réseau simple de courbes C dont chacune contient une involution γ'_n d'ordre deux et de genre $\pi > 0$. Les raisonnements des paragraphes 2, 4, 5 s'appliquent à ce cas sans difficulté. Reprenons celui du paragraphe 3.

Les courbes Γ_P, Γ_Q sont certainement irréductibles et la courbe Γ_P ne peut passer par le point P. Il en résulte que la courbe Γ_Q passe par le point P. D'autre part, les courbes Γ_P, Γ_Q sont rationnelles ; elles ne peuvent avoir un point commun, car alors elles se confondraient. Par conséquent, ces courbes appartiennent à un faisceau $\{\Gamma\}$ de courbes rationnelles nécessairement unisécantes des courbes C. La surface F est donc birationnellement équivalente à une réglée. Le théorème est donc complètement démontré.

Liége, le 29 février 1936.

M. HAYEZ, Imprimeur de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.