

GÉOMÉTRIE ALGÈBRE

Construction

d'une surface canonique du neuvième ordre,

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Dans ses *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche* (1), M. Enriques a appelé l'attention sur l'intérêt de la détermination des surfaces canoniques, c'est-à-dire des surfaces dont le système des sections hyperplanes est le système canonique complet. Considérons en particulier les surfaces appartenant à l'espace ordinaire. La surface du cinquième ordre est canonique. Pour qu'une surface du sixième ordre soit canonique, il suffit qu'elle possède une cubique plane double. M. Enriques a indiqué, dans ses *Lezioni*, que si une surface du septième ordre est canonique, elle possède une courbe double du septième ordre ayant un point triple, triple également pour la surface. Il a également indiqué que si une surface du huitième ordre est canonique, elle possède une courbe double du douzième ordre, ayant quatre points triples, triples également pour la surface. Dans les deux cas, nous avons pu récemment prouver l'existence de ces surfaces (2). Dans cette note, nous nous proposons de construire une surface canonique du neuvième ordre.

Si une surface F du neuvième ordre est canonique, elle possède une courbe double D d'ordre 18 et ses

(1) Rédigées par M. CAMPEDELLI (Padoue, Cedam, 1932). Voir p. 313 et suiv.

(2) *Construction d'une surface canonique du septième ordre* (BULL. DE LA SOC. DES SCIENCES DE LIÈGE, 1944, pp. 94-97).

Construction d'une surface canonique du huitième ordre (BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES, 1944).

adjointes d'ordre cinq comprennent comme partie une surface fixe du quatrième ordre passant par D. La démonstration de l'existence de F revient à celle de l'existence d'une surface F_0 du neuvième ordre, touchant la surface du quatrième ordre le long de la courbe D. Nous démontrons précisément le théorème suivant :

Il existe une surface canonique du neuvième ordre. Elle possède une courbe double d'ordre 18 et de genre 19, tracée sur une surface du quatrième ordre. Celle-ci possède dix points doubles coniques qui sont triples pour la courbe double et triples également pour la surface du neuvième ordre.

La difficulté de la démonstration de l'existence d'une surface canonique d'ordre n de l'espace ordinaire, possédant une courbe double, réside dans la démonstration de l'existence d'une surface d'ordre n touchant une surface d'ordre $n - 5$ le long de la courbe double. Dans les cas $n = 7, 8$ ou 9 , nous avons pu y arriver grâce à la théorie des involutions appartenant à une surface algébrique ⁽¹⁾ et dans le cas $n = 9$, grâce aussi aux travaux de G. Humbert sur la surface de Kummer ⁽²⁾. Le cas général $n > 9$ pourra peut-être se traiter de la même manière ; nous espérons pouvoir y revenir.

1. Soit F une surface du neuvième ordre dont le système canonique complet est constitué par les sections planes. Le genre linéaire de la surface est donc $p^{(1)} = 10$ et elle possède donc une courbe double D d'ordre 18.

Le système canonique de F est découpé par les adjointes d'ordre cinq et celles-ci doivent donc se décomposer en une surface fixe Φ du quatrième ordre, passant

⁽¹⁾ On pourra consulter sur cet objet notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Actualité scient. et indus., Paris, Hermann, 1935).

⁽²⁾ *Théorie générale des surfaces hyperelliptiques* (JOURNAL DE MATHÉMATIQUES, 1893 et ŒUVRES DE G. HUMBERT, tome II, Paris, Gauthier-Villars, 1936).

par la courbe D , et en un plan variable. Il en résulte que la courbe double D de F est l'intersection complète de cette surface avec la surface Φ et que, de plus, la courbe D ne peut appartenir à une surface irréductible du cinquième ordre.

Soit Ψ une surface du cinquième ordre ne contenant pas Φ comme partie. Les surfaces F et $\Phi + \Psi$ déterminent un faisceau dont la surface générale touche la surface Φ le long de la courbe D . Nous commencerons donc par rechercher s'il existe, sur la surface Φ , une courbe D n'appartenant pas à une surface irréductible du cinquième ordre, le long de laquelle une surface du neuvième ordre touche la surface Φ .

2. Supposons que la surface Φ , du quatrième ordre, possède un certain nombre ν de points doubles coniques P_1, P_2, \dots, P_ν et soit d'autre part la plus générale possible. Φ est donc une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$) et chacun des points doubles est équivalent à une courbe rationnelle de degré -2 . Nous désignerons par $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_\nu$ ces courbes rationnelles.

Supposons que la courbe D soit irréductible et passe simplement par les ν points doubles. En désignant par C les sections planes de Φ , nous devons avoir, sur cette surface, la relation fonctionnelle

$$9C \equiv 2D + \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_\nu.$$

Le degré de D est donné par

$$2[D, D] = 9.18 - \nu$$

et par conséquent ν est pair. Nous poserons $\nu = 2\nu'$.

Sur une surface de genres un, le degré d'une courbe de genre π est égal à $2\pi - 2$. Si donc π est le genre de la courbe D , nous avons

$$[D, D] = 2\pi - 2 = 81 - \nu'.$$

Il en résulte que ν' est impair. Nous poserons

$$\nu' = 2\epsilon + 1, \quad \nu = 4\epsilon + 2$$

et nous aurons alors pour le genre de D,

$$\pi = 40 - \epsilon.$$

3. Supposons maintenant qu'il existe une surface F_0 du neuvième ordre, touchant Φ le long de la courbe D.

Les plans tangents aux surfaces Φ et F_0 le long de la courbe D forment une développable ; la classe de cette développable est égale au nombre des points d'intersection de D avec la première polaire d'un point quelconque M par rapport à Φ , en dehors des points P_1, P_2, \dots, P_ν , c'est-à-dire à $52 - 4\epsilon$.

La première polaire du point M par rapport à F_0 coupe la courbe D en $8,18$ points. Parmi ceux-ci se trouvent les $52 - 4\epsilon$ points de D en lesquels les plans tangents à Φ et à F_0 passent par M. Soit R un des autres points d'intersection. Le plan tangent à F_0 en R ne peut être bien déterminé, car alors il serait aussi tangent à Φ et la première polaire de M par rapport à cette surface contiendrait D, ce qui est absurde. Le point R est donc double (en général conique) pour la surface F_0 .

La surface F_0 possède donc $92 + 4\epsilon$ points doubles coniques sur la courbe D.

Soit maintenant Ψ une surface du cinquième ordre ne contenant pas Φ comme partie et ne passant pas par les points P_1, P_2, \dots, P_ν . Elle coupe la courbe D en 90 points. La surface $\Phi + \Psi$ peut être considérée comme une surface du neuvième ordre touchant Φ le long de D. Cette surface possède $92 + 4\epsilon$ points doubles sur la courbe D, à savoir les $\nu = 4\epsilon + 2$ points doubles de Φ et les 90 points d'intersection de D et de Ψ .

Les surfaces F_0 et $\Phi + \Psi$ déterminent un faisceau $|F_1|$ de surfaces du neuvième ordre touchant Φ le long de D. Chacune de ces surfaces possède $92 + 4\epsilon$ points

doubles sur la courbe D et on peut affirmer que ces points doubles varient avec la surface pourvu que l'on ait choisi une surface Ψ ne passant pas par les points doubles de F_0 situés sur D .

Cela étant, soit R un point de D . Il existe une et une seule surface du faisceau $|F_1|$ touchant en R une droite non tangente en ce point à la surface Φ . Cette surface possède un point double en R et on en conclut que les groupes G des $92 + 4\epsilon$ points doubles des surfaces F_1 sur D , varient dans une série d'indice un. Cette série étant d'autre part en correspondance biunivoque avec les surfaces du faisceau, est rationnelle, donc linéaire.

Ainsi les groupes G appartiennent sur D à une série linéaire déterminée par le groupe (D, Ψ) augmenté des points P_1, P_2, \dots, P_ν .

4. Supposons qu'il existe une surface F , du neuvième ordre, ayant D comme courbe double. Les surfaces F et F_0 déterminent un faisceau $|F_1|$ contenant une surface comprenant Φ comme partie. Cette surface est complétée par une surface Ψ_1 du cinquième ordre.

Actuellement, les $92 + 4\epsilon$ points doubles que la surface F_0 possède sur la courbe D sont également doubles pour la surface F et par conséquent sont doubles pour toutes les surfaces du faisceau $|F_1|$, en particulier pour la surface $\Phi + \Psi_1$. Inversement, les points doubles de la surface $\Phi + \Psi_1$ situés sur la courbe D doivent être doubles pour toutes les surfaces du faisceau $|F_1|$ et en particulier pour la surface F_0 . Mais parmi les points doubles de la surface $\Phi + \Psi_1$, se trouvent les $4\epsilon + 2$ points doubles de la surface Φ . La surface F_0 devrait donc avoir des points doubles en P_1, P_2, \dots, P_ν . Mais alors, la courbe D aurait également des points doubles en P_1, P_2, \dots, P_ν , contrairement à l'hypothèse.

5. On pourrait reprendre l'analyse précédente en sup-

posant qu'un certain nombre des points P_1, P_2, \dots, P_ν sont doubles au moins pour la courbe D ; nous ne le ferons pas mais supposerons directement que ces points sont triples pour la courbe D . La raison de cette manière de faire est que la singularité ordinaire d'une surface algébrique est une courbe double ayant un certain nombre de points triples, triples également pour la surface.

Supposons donc que la courbe D possède des points triples en ν points P_1, P_2, \dots, P_ν doubles coniques pour la surface Φ . On a cette fois la relation fonctionnelle

$$9C \equiv 2D + 3(\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_\nu).$$

En exprimant que le degré de D est un nombre pair, on trouve encore que ν est de la forme.

$$\nu = 4\epsilon + 2.$$

On a actuellement, pour le genre de D ,

$$\pi = 37 - 9\epsilon.$$

Soit F_0 une surface du neuvième ordre touchant Φ le long de D . Cette surface doit avoir des points triples en P_1, P_2, \dots, P_ν . En effet, en un de ces points, P_1 par exemple, la surface F_0 possède trois tangentes — les tangentes à la courbe D — non situées dans un même plan, donc P_1 est au moins double pour F_0 . Mais si P_1 était exactement double pour F_0 , D passerait doublement par ce point, P_1 , et de même P_2, \dots, P_ν sont donc triples pour la surface F_0 .

La développable, engendrée par les plans tangents à Φ le long de D , est actuellement de classe $48 - 12\epsilon$. La première polaire d'un point M par rapport à F_0 est une surface du huitième ordre passant deux fois par chacun des points P_1, P_2, \dots, P_ν et rencontrant encore D , en dehors de ces points, en $132 - 24\epsilon$ points. Parmi ceux-ci, se trouvent les $48 - 12\epsilon$ points en lesquels les plans tangents à Φ et à F_0 passent par M . Les $84 - 12\epsilon$ points restants sont doubles pour la surface F_0 .

La surface F_0 possède donc $4\epsilon + 2$ points triples P_1, P_2, \dots, P_ν et $84 - 12\epsilon$ points doubles sur la courbe D .

6. Soit Ψ une surface du cinquième ordre ne contenant pas Φ comme partie et passant simplement par les points P_1, P_2, \dots, P_ν . Cette surface coupe encore D en $84 - 12\epsilon$ points en dehors de P_1, P_2, \dots, P_ν .

La surface $\Phi + \Psi$ peut être considérée comme une surface du neuvième ordre ayant des points triples en P_1, P_2, \dots, P_ν , $84 - 12\epsilon$ points doubles sur D et touchant la surface Φ le long de la courbe D .

Le faisceau de surface $|F_1|$ déterminé par les surfaces F_0 et $\Phi + \Psi$, est formé de surfaces touchant Φ le long de D . Chacune d'elles possède $84 - 12\epsilon$ points doubles sur D et on démontre, comme plus haut, que ces groupes de points doubles appartiennent à une série linéaire $|G|$, déterminée par la série découpée sur D par les surfaces du cinquième ordre passant par les points P_1, P_2, \dots, P_ν .

Supposons qu'il existe une surface F du neuvième ordre ayant D comme courbe double et P_1, P_2, \dots, P_ν comme points triples.

Les surfaces F et F_0 déterminent un faisceau $|F_1|$ dont la surface générale touche Φ le long de D . Les surfaces de ce faisceau possèdent des points triples en P_1, P_2, \dots, P_ν et $84 - 12\epsilon$ points doubles fixes de la courbe D .

Il existe une surface du faisceau contenant Φ comme partie et complétée par une surface Ψ_1 du cinquième ordre passant par P_1, P_2, \dots, P_ν et par les $84 - 12\epsilon$ points doubles de la surface F_0 .

Inversement, supposons qu'il existe une surface Ψ_1 du cinquième ordre passant par P_1, P_2, \dots, P_ν et par les $84 - 12\epsilon$ points doubles de F_0 sur D . Les surfaces F_0 et $\Phi + \Psi_1$ déterminent un faisceau $|F_1|$ de surfaces F_1 ayant les mêmes singularités que F_0 sur la courbe D . Soit R un point de D simple pour F_0 . Il existe une sur-

face F du faisceau $|F_1|$ tangente en R à une droite ne touchant pas Φ en ce point. Le point R est double pour la surface F .

Soit M un point non situé dans le plan tangent à F_0 en R . La première polaire du point M par rapport à F coupe la courbe D aux points suivants : Les points P_1, P_2, \dots, P_ν , comptés chacun six fois ; les $48 - 12\epsilon$ points de contact des plans tangents à Φ menés par M ; les $84 - 12\epsilon$ points doubles pour les surfaces F_1 ; enfin le point R . Il en résulte que la polaire en question rencontre D en $8.18 + 1$ points et par conséquent contient cette courbe. Comme cela a lieu pour tous les points M choisis de la manière indiquée plus haut, il en résulte que la courbe D est double pour la surface F .

Nous voyons donc que l'existence d'une surface F passant doublement par D dépend de l'existence d'une surface F_0 touchant Φ le long de la courbe D et de celle d'une surface du cinquième ordre passant par les points P_1, P_2, \dots, P_ν et par les $84 - 12\epsilon$ points doubles de F_0 situés sur D .

7. Les surfaces du cinquième ordre passant par P_1, P_2, \dots, P_ν et ne comprenant pas Φ comme partie, dépendent de $49 - 4\epsilon$ paramètres. Elles coupent encore D , en dehors de P_1, P_2, \dots, P_ν , en des groupes G de $84 - 12\epsilon$ points formant une série linéaire dont nous désignerons la dimension par r .

Observons que la surface du quatrième ordre Φ , supposée de genres un ($p_a = P_4 = 1$), possède au plus 16 points doubles. On a donc $\epsilon \leq 3$.

La courbe D étant de genre $37 - 9\epsilon$, la série canonique de cette courbe est d'ordre $72 - 18\epsilon$. On a

$$84 - 12\epsilon > 72 - 18\epsilon,$$

donc la série $|G|$ est non spéciale et a la dimension $r = 47 - 3\epsilon$.

Si donc on peut mener une surface du cinquième ordre

ne contenant pas Φ comme partie par les points P_1, P_2, \dots, P_v et par $47 - 3\epsilon$ des $84 - 12\epsilon$ points doubles de F_0 sur D , cette surface passera par les $84 - 12\epsilon$ points doubles de F_0 sur D et on sera conduit à l'existence de la surface F ayant D comme courbe double.

Pour cela, on doit avoir

$$49 - 4\epsilon \geq 47 - 3\epsilon,$$

c'est-à-dire $\epsilon \leq 2$.

Mais d'autre part, la courbe D ne peut appartenir à une surface du cinquième ordre irréductible et il ne peut donc passer une surface Ψ par $48 - 3\epsilon$ points de D . Cela exige $\epsilon = 2$.

La surface Φ possède donc 10 points doubles coniques P_1, P_2, \dots, P_{10} , la surface F_0 dix points triples P_1, P_2, \dots, P_{10} et 60 points doubles sur la courbe D . Cette courbe D est de genre 19.

8. Il nous reste à démontrer l'existence d'une surface F_0 touchant Φ le long de la courbe D .

Dans ce qui précède, nous avons supposé que Φ était la surface du quatrième ordre la plus générale possible, possédant dix points doubles coniques. Cela nous a permis d'utiliser le fait que la surface Φ est de genres un. Nous pouvons particulariser la surface Φ en lui imposant de nouveaux points doubles, *n'appartenant pas à la courbe D* , mais à condition que l'imposition de ces nouveaux points doubles n'altère pas son caractère de surface de genres un, sans que les raisonnements faits plus haut cessent de subsister.

Cela étant, nous supposerons que la surface Φ est une surface de Kummer, possédant seize points doubles coniques.

G. Humbert ⁽¹⁾ a montré qu'il existait sur la surface de Kummer 32 familles de courbes d'ordre 18 passant

(1) *Œuvres de G. Humbert*, tome II, pp. 41 et 45.

par dix points doubles et qu'il y avait une surface du neuvième ordre inscrite à la surface le long de chaque courbe de chacune de ces familles.

Fixons l'attention sur une de ces familles et désignons ses courbes par L . Il découle des résultats de G. Humbert que les courbes L forment un système linéaire $|L|$ de dimension 39. La surface de Kummer étant de genres un, les courbes L sont de genre 39 et $|L|$ est de degré 76. Les courbes L rencontrent en un point chacune des courbes rationnelles de degré -2 équivalentes aux dix points doubles qui leur appartiennent. Nous continuerons à désigner ces points doubles par P_1, P_2, \dots, P_{10} ; les autres points doubles de la surface de Kummer seront désignés par $P_{11}, P_{13}, \dots, P_{16}$.

La surface de Kummer Φ représente une involution du second ordre I_2 appartenant à une surface de Jacobi Φ^* . Cette involution possède 16 points unis $P_1^*, P_2^*, \dots, P_{16}^*$, qui correspondent aux points doubles P_1, P_2, \dots, P_{16} de Φ .

Aux courbes L correspondent sur la surface Φ^* des courbes L^* de genre 82 passant simplement par les points $P_1^*, P_2^*, \dots, P_{10}^*$. Ces courbes L^* appartiennent totalement à un système linéaire $|L_0^*|$ de dimension 80, dépourvu de points-base. Ce système contient deux systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I_2 : l'un est le système $|L^*|$, de dimension 39; l'autre est un système $|L_1^*|$, de dimension 40.

Dans le système $|L_0^*|$, il existe au moins ∞^{20} courbes D^* ayant des points triples en $P_1^*, P_2^*, \dots, P_{10}^*$. Ces courbes D^* forment un système linéaire $|D^*|$ transformé en lui-même par la transformation génératrice de l'involution I_2 . Par conséquent, ce système comprend deux systèmes linéaires appartenant à l'involution, ou bien il appartient lui-même à l'involution. Dans les deux cas, il existe des courbes D^* appartenant à l'involution, ayant des points triples en P_1^*, P_2^*, \dots ,

P_{10}^* et ne passant pas par les points P_{12}^* , P_{11}^* , ..., P_{16}^* . A une telle courbe correspond sur la surface Φ une courbe D passant trois fois par chacun des points P_1, P_2, \dots, P_{10} et appartenant au système $|L|$. La courbe D est, d'après la formule de Zeuthen, de genre 19 et, puisqu'elle appartient au système $|L|$, il existe une surface F_0 du neuvième ordre touchant Φ le long de la courbe. Cette surface F_0 possède nécessairement des points triples en P_1, P_2, \dots, P_{10} .

L'existence de F_0 étant ainsi prouvée, celle de la surface F passant doublement par D , en résulte.

9. La surface F , dont nous venons de prouver l'existence, a donc pour système canonique le système formé par ses sections planes. Elle a par conséquent les genres $p_g = 4$, $p^{(1)} = 10$.

Les biadjointes de F sont des surfaces d'ordre 10 passant doublement par D et ne comprenant pas F comme partie; elles comprennent donc les surfaces formées de Φ et des surfaces du sixième ordre passant par D . Les surfaces du sixième ordre passant par les points P_1, P_2, \dots, P_{10} dépendent de 73 paramètres et donnent sur D une série d'ordre 78, certainement non spéciale et par suite de dimension 59. Les surfaces du sixième ordre contenant D dépendent donc de 13 paramètres et on a $P_2 \geq 14$.

D'autre part, on a $P_2 = p_a + p^{(1)} = p_a + 10$, donc $p_a \geq 4$. Mais on a aussi $p_a \leq p_g$, donc $p_a \leq 4$ et par suite $p_a = 4$. La surface F est donc régulière.

On voit donc que :

La surface F possède les caractères

$$p_a = p_g = 4, \quad p^{(1)} = 10, \quad P_2 = 14.$$

On en conclut également que les biadjointes de F sont toutes réductibles et possèdent la surface Φ comme partie fixe.

Liège, le 4 avril 1944.