EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége*
Séance du 17 février 1944. — N° 2.

Sur un théorème de Salmon concernant les droites d'une surface cubique,

par LUCIEN GODEAUX, Membre de la Société.

Salmon a démontré que les vingt-sept droites d'une surface cubique étaient l'intersection complète de cette surface et d'une surface irréductible du neuvième ordre [1]. Il établit ce théorème en utilisant la théorie des formes algébriques. A la suite d'une conversation avec M. Demoulin, nous avons été amené à chercher une démonstration géométrique du théorème de Salmon; c'est cette démonstration que nous exposerons ici.

En utilisant la représentation plane de la surface cubique, nous établissons les théorèmes suivants :

I. *Les douze droites d'un « double-six » d'une surface cubique forment l'intersection complète de cette surface et d'une surface irréductible du quatrième ordre.*

II. *Les quinze droites n'appartenant pas à un « double-six »*

[1] SALMON, *Traité de Géométrie analytique à trois dimensions* (traduction Chemin), (Paris, Gauthier-Villars, 1892), IIIe partie, pp. 76-77.

d'une surface cubique forment l'intersection complète de cette surface et d'une surface irréductible du cinquième ordre.

En partant d'un *double-six* d'une surface cubique, on peut donc former une surface du neuvième ordre, décomposée en une surface du quatrième ordre et une surface du cinquième ordre, coupant la surface suivant ses vingt-sept droites. Or, une surface cubique contient 36 *double-six*. En partant d'un second *double-six*, on formera une seconde surface du neuvième ordre analogue à la précédente. Ces deux surfaces déterminent un faisceau de surfaces du neuvième ordre, en général irréductibles et l'on en déduit le théorème de Salmon :

III. *Les vingt-sept droites d'une surface cubique forment l'intersection complète de cette surface et d'une surface irréductible du neuvième ordre.*

1. Soit F une surface cubique dépourvue de points multiples et possédant par conséquent vingt-sept droites distinctes.

On sait que l'on peut représenter F sur un plan σ de manière qu'à ses sections planes correspondent des cubiques γ_3 passant par six points distincts $A_2, A_3, \ldots, A_6$, non situés sur une même conique et dont trois ne sont jamais en ligne droite.

Nous désignerons par $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_6$ les coniques passant par cinq des points $A_1, A_2, \ldots, A_6$, l'indice de β indiquant celui du point qu'elle ne contient pas.

Aux domaines des points $A_1, A_2, \ldots, A_6$ correspondent sur F six droites $a_1, a_2, \ldots, a_6$, deux à deux gauches. Aux coniques $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_6$ correspondent six droites $b_1, b_2, \ldots b_5$ deux à deux gauches. Chacune des droites b s'appuie sur les cinq droites a qui n'ont pas le même indice. Les six droites a et les six droites b forment donc un *double-six* de la surface.

Aux quinze droites $A_1A_2, A_1, A_3, \ldots, A_5A_6$ correspondent sur b quinze droites que nous désignerons par $c_{12}, c_{13}, \ldots, c_{56}$.

2. Aux sections de la surface F par les surfaces du quatrième ordre correspondent dans σ les courbes du système $|4\gamma_3|$, c'est-à-dire les courbes du douzième ordre passant quatre fois par les points $A_1, A_2, \ldots, A_6$. En particulier, aux sections de la surface F par les surfaces du quatrième ordre contenant les six droites $a_1, a_2, \ldots, a_6$ correspondent les courbes du douzième ordre passant cinq fois par les six points $A_1, A_2, \ldots, A_6$.

Soit γ_{12} une telle courbe, si elle existe. La conique β_1 rencontre γ_{12} en 35 points $A_2, A_3, \ldots, A_6$; par conséquent γ_{12} contient β_1

comme partie; elle est complétée par une courbe d'ordre dix, passant cinq fois par A_1 et quatre fois par chacun des points $A_2, A_3, \ldots, A_6$. La conique β_2 rencontre cette courbe en 26 points; donc, elle fait partie de cette courbe. En continuant, on voit que la courbe γ_{12} existe, est unique et constituée par les six coniques $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_6$.

Cette dernière propriété traduit d'ailleurs le fait que si une surface du quatrième ordre contient les six droites a_1, a_2, a_6, elle contient nécessairement les droites $b_1, b_2, \ldots, b_6$, dont chacune rencontre cinq des précédentes.

L'existence de la courbe γ_{12} prouve l'existence d'une surface du quatrième ordre Φ_4, irréductible, contenant les douze droites a et b, car le système formé par les courbes d'ordre 12 passant 4 fois par les points $A_1, A_2, \ldots, A_6$ est régulier et a la même dimension, trente, que le système des surfaces du quatrième ordre ne contenant pas F comme partie.

On peut du reste obtenir le résultat directement. Les surfaces du quatrième ordre sont en nombre ∞^{34}; il y en a ∞^3 comprenant F comme partie, donc il y en a ∞^{30} ne contenant pas F. Passer par une droite équivaut, pour une surface du quatrième ordre, à cinq conditions, donc il existe bien une surface du quatrième ordre, Φ_4, irréductible, contenant les six droites $a_1, a_2, \ldots, a_6$ et par conséquent les six droites $b_1, b_2, \ldots, b_6$.

L'intersection complète des surfaces F et Φ_4 est évidemment formée des droites a et b.

3. Aux sections de F par les surfaces du cinquième ordre correspondent dans σ les courbes du système $|5\gamma_3|$, c'est-à-dire les courbes γ_{15}, d'ordre 15, passant cinq fois par les points $A_1, A_2, \ldots, A_6$.

Le système $|\gamma_{15}|$ est régulier et a la même dimension, 45, que le système des surfaces du cinquième ordre ne contenant pas F comme partie. Parmi les courbes γ_{15} se trouve la courbe formée par les quinze droites $a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{56}$ joignant les points $A_1, A_2, \ldots, A_6$ deux à deux. Il en résulte qu'il existe une surface du cinquième ordre, Φ_5, irréductible, passant par les quinze droites $c_{12}, c_{13}, \ldots, c_{56}$.

On peut également obtenir ce résultat par une autre voie. Les faces du cinquième ordre sont en nombre ∞^{55}; il y en a ∞^9 formées de la surface F et d'une quadrique, donc il y en a ∞^{45} ne contenant pas F comme partie.

Les surfaces du cinquième ordre passant par les cinq droites deux à deux gauches c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{15}, c_{16} satisfont à $5 \times 6 = 30$ conditions et sont en nombre ∞^{15}.

Les quatre droites deux à deux gauches c_{23}, c_{24}, c_{25}, c_{26} s'appuient chacune sur trois des droites précédentes [1]. Les surfaces du cinquième ordre qui doivent les contenir satisfont à $4 \times 3 = 12$ conditions et sont donc en nombre ∞^3.

Les trois droites deux à deux gauches c_{34}, c_{35}, c_{36} rencontrent chacune cinq des droites précédentes et par conséquent il existe une surface du cinquième ordre, irréductible, contenant ces droites. Soit Φ_5 cette surface.

Les droites c_{45}, c_{46}, c_{56} rencontrent chacune six des droites précédentes et elles appartiennent donc à la surface Φ_5.

L'intersection complète de la surface F et de la surface irréductible Φ_5 se compose évidemment des quinze droites c_{12}, c_{13}, ..., c_{56}.

4. On sait que les droites d'une surface cubique peuvent être arrangées de trente-six manières en *double-six*. Considérons un arrangement distinct du précédent. Il existe une surface irréductible Φ'_4 du quatrième ordre, coupant F suivant les douze droites du nouveau *double-six* considéré et une surface irréductible Φ'_5, du cinquième ordre, coupant F suivant les quinze droites restantes.

Les surfaces du neuvième ordre du faisceau déterminé par les surfaces $\Phi_4 + \Phi_5$ et $\Phi'_4 + \Phi'_5$ sont en général irréductibles. En effet, s'il en était autrement, le faisceau considéré serait composé au moyen d'un autre faisceau, ce qui est impossible puisque les surfaces Φ_4, Φ'_4, Φ_5, Φ'_5 sont irréductibles.

Les surfaces du faisceau coupent F suivant ses vingt-sept droites. Celle de ces surfaces qui passe par un point de F non situé sur une de ces droites contient F comme partie et est complétée par une surface du sixième ordre.

On voit donc qu'il existe une surface du neuvième ordre irréductible coupant F suivant ses vingt-sept droites, ce qui est le théorème de Salmon.

5. On peut former aisément un second *double-six* de F de la manière suivante :

Effectuons, dans le plan σ, une transformation quadratique ayant pour points fondamentaux A_1, A_2, A_3. Aux cubiques γ_3

---

(1) Deux droites c_{ik}, c_{jh} se rencontrent en un point si les nombres i, k, j, h sont distincts; elles ne se rencontrent pas dans le cas opposé.

correspondent des cubiques γ'_3 passant par A_4, A_5, A_6 et par les points fondamentaux qui correspondent aux droites A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2. On obtient donc une nouvelle représentation plane de F analogue à la précédente.

En partant de cette nouvelle représentation plane, on obtient siz droites deux à deux gauches c_{12}, c_{13}, c_{23}, a_4, a_5, a_6 et six droites deux à deux gauches c_{15}, c_{16}, c_{56}, b_1, b_2, b_3 formant, avec les précédentes, un *double-six*. Ces douze droites appartiennent à la surface irréductible Φ'_4. Les quinze autres droites appartiennent à la surface irréductible Φ'_5.

Liége, le 7 février 1944.

M. HAYEZ, Impr. de l'Académie royale, 112, rue de Louvain, Bruxelles
(Domicile légal : rue de la Chancellerie, 4)