Extrait du *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége.*
Séance du 18 mars 1948. — N° 3.

Sur la construction de modèles de surfaces algébriques contenant des involutions cycliques,

par Lucien GODEAUX, Membre de la Société.

Nous avons consacré plusieurs mémoires à l'étude de la structure des points unis d'une involution cyclique appartenant à une surface algébrique F et à celle de la structure des points de diramation correspondants sur une surface Φ image de l'involution [1]. Il importe, dans une telle recherche, de montrer que les résultats se présentent effectivement, en construisant des exemples ; c'est ce à quoi nous nous sommes employé dans plusieurs notes. L'exemple le plus simple est obtenu lorsque la surface F est un plan, l'involution étant engendrée par une homographie cyclique non homologique [2]. On peut se demander s'il peut exister des cas où la surface F n'est pas rationnelle et où les points unis et les points de diramation présentent la même structure que dans le cas précédent. Nous montrons dans cette note que la réponse est affirmative. Après avoir traité le cas général, il nous a paru utile d'examiner avec plus de détails un cas particulier.

1. Soient p un nombre premier impair et α un entier compris entre 1 et p $(1 < \alpha < p)$. Posons $p = 2\nu + 1$.

---

[1] Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (*Actualités scient. et indust.*, n° 270, Paris, Hermann, 1935); Sur la structure des points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (*Mém. de l'Acad. roy. de Belgique*, in-8°, 1938, pp. 1-44); Sur les surfaces multiples ayant un nombre fini de points de diramation (*Annales scient. de l'École Normale Supérieure*, 1938, pp. 193-222); Remarques sur les surfaces multiples ayant un nombre fini de points de diramation (*Bull. des Sc. mathém.*, 1940, pp. 245-256); Sur les points de diramation des surfaces multiples (*Bull. de la Soc. roy. des Sc. de Liège*, 1940, pp. 54-79, 128-137); Recherches sur les points unis isolés des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1948, pp. ...).

[2] Sur les homographies planes cycliques (*Mém. de la Soc. roy. des Sc. de Liège*, 1928, 26 p.); Sur les surfaces représentant les homographies planes engendrées par des homographies cycliques (*Ibidem*, 1930, 21 p.); Sur les courbes tracées sur la surface représentant l'involution engendrée par une homographie plane cyclique (*Ibidem*, 1931, 16 p.); Sur la structure des points unis des homographies cycliques du plan (*Mém. de l'Acad. roy. de Belgique*, in-8°, 1941, pp. 1-42).

Considérons, dans un espace linéaire $S_{\nu+4}$, à $\nu+4$ dimensions, l'homographie H d'équations

$$x'_0 : x'_1 : \ldots : x'_{\nu+2} : x'_{\nu+3} : x'_{\nu+4} = x_0 : x_1 : \ldots x_{\nu+2} : \varepsilon x_{\nu+3} : \varepsilon^{\alpha} x_{\nu+4},$$

où ε est une racine primitive d'ordre p de l'unité.

Désignons par O_i le point de $S_{\nu+4}$, dont toutes les coordonnées sont nulles, sauf x_i. L'homographie H a pour axes ponctuels l'espace $O_0 O_1 \ldots O_{\nu+2}$, à $\nu+2$ dimensions, et les points $O_{\nu+3}$, $O_{\nu+4}$.

Formons les équations

$$x^i_{\nu+3} x^k_{\nu+4} = \varphi_{ik}(x_0, x_1, \ldots, x_{\nu+2}), \tag{1}$$

où l'on a

$$i + k \leqslant p, \qquad i + \alpha k \equiv 0, \qquad (\text{mod. p}),$$

φ_{ik} étant une forme algébrique de degré $i+k$.

Les hypersurfaces (1) sont au nombre de $\nu+2$ et sont transformées en elles-mêmes par l'homographie H. Elles ont en commun une surface F sur laquelle l'homographie H engendre une involution I_p, d'ordre p.

La surface F ne passe pas par les points $O_{\nu+3}$, $O_{\nu+4}$, car pour $i = p$, $k = 0$, l'équation (1) s'écrit $x^p_{\nu+3} = \varphi_{po}$, et pour $i = 0$, $k = p$, $x^p_{\nu+4} = \varphi_{op}$. Les points unis de I_p sont donc les points de rencontre de F avec l'espace $O_0 O_1 \ldots O_{\nu+2}$.

L'ordre de la surface F est multiple de p^2, car parmi les supersurfaces (1) il s'en trouve deux, pour $i = 0$, $k = p$ et pour $i = p$, $k = 0$, qui sont d'ordre p. Nous représenterons cet ordre par np. Le nombre des points unis de I_p est précisément égal à l'ordre, np, de la surface F.

Pour obtenir une surface image de l'involution I_p, il suffit de projeter la surface F de la droite $O_{\nu+3} O_{\nu+4}$ sur l'espace $O_0 O_1 \ldots O_{\nu+2}$. On obtient ainsi une surface Φ d'ordre n. Les np points de diramation de la surface Φ occupent la même position que les points unis de la surface F. Il est clair qu'ils sont tous de même nature; leur étude pourra se faire de la manière suivante :

On peut supposer, sans nuire à la généralité, que le point O_0 est un point uni de l'involution I_p sur la surface F. Posons alors

$$\varphi_{ik} \equiv x_0^{i+k-1} \alpha_{ik} + x_0^{i+k-2} \beta_{ik} + \cdots,$$

α_{ik}, β_{ik} ... étant des formes algébriques de degrés 1, 2, ... par rapport aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_{\nu+2}$. Le plan tangent à F en O_0 sera représenté par les équations $\alpha_{ik} = 0$, et dans ce plan, H détermine l'homographie

$$x'_0 : x'_{\nu+3} : x'_{\nu+4} = x_0 : \varepsilon x_{\nu+3} : \varepsilon^{\alpha} x_{\nu+4}.$$

L'étude du point uni O_0 et celle du point de diramation correspondant pourront se faire en utilisant les résultats que nous avons obtenus sur les involutions planes.

2. Désignons par C les sections hyperplanes de la surface F. Le système $|C|$ contient un système linéaire partiel $|C_0|$ appartenant à l'involution I_p, découpé par les hyperplans passant par la droite $O_{\nu+3}\, O_{\nu+4}$. Il lui correspond sur Φ le système $|\Gamma_0|$ des sections hyperplanes de cette surface.

Dans $|C|$ se trouvent également deux courbes isolées, découpées par les hyperplans $x_{\nu+3}=0$, $x_{\nu+4}=0$, appartenant à l'involution I_p. A ces courbes correspondent sur Φ des courbes d'ordre n, représentées respectivement par les équations tirées de (1) lorsqu'on y fait $x_{\nu+3}=0$, ou $x_{\nu+4}=0$. Ces deux courbes passent par les np points de diramation de la surface Φ.

Envisageons le système linéaire complet $|p\,C|$, découpé sur F par les hypersurfaces d'ordre p. Il contient p systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I_p. L'un d'eux est découpé par les hypersurfaces

$$\sum_{i,k} x_{\nu+3}^i\, x_{\nu+4}^k\, \psi_{ik}(x_0, x_1, \ldots, x_{\nu+2}) = 0,$$

où ψ_{ik} est une forme algébrique de degré $p-i-k$, à coefficients variables, et où

$$0 \leqslant i+k \leqslant p, \qquad i+\alpha k \equiv 0, \qquad (\text{mod. p}).$$

Aux courbes de ce système correspondent sur Φ les courbes du système $|p\,\Gamma_0|$.

Considérons le système linéaire d'hypersurfaces

$$\sum_{i,k} x_{\nu+3}^i\, x_{\nu+4}^k\, \psi_{ik}(x_0, x_1, \ldots, x_{\nu+2}) = 0, \tag{2}$$

où ψ_{ik} est encore une forme algébrique de degré $p-i-k$, à coefficients variables, mais où l'on suppose

$$0 < i+k \leqslant p, \qquad i+\alpha k \equiv \beta, \qquad (\text{mod. p}),$$

β étant un entier compris entre 0 et p $(0<\beta<p)$. Chaque terme de l'équation (2) contient au moins une des variables $x_{\nu+3}$, $x_{\nu+4}$; par conséquent, les hypersurfaces (2) passent par tous les points unis de l'involution I_p. Aux courbes découpées sur F par les hypersurfaces (2) correspondent sur Φ des courbes Γ_β vérifiant la relation fonctionnelle

$$p^2\,\Gamma_0 \equiv p\,\Gamma_\beta + \Delta,$$

Δ étant une certaine combinaison linéaire des courbes rationnelles équivalentes aux points de diramation de la surface Φ.

On peut obtenir les équations des courbes Γ_β de la manière suivante : Elevons les deux membres de l'équation (2) à la puissance p. En tenant compte des équations (1), on obtient l'équation d'une hypersurface de $S_{\nu+2}$, de degré p^2 ayant un contact d'ordre p avec la surface Φ le long d'une courbe Γ_β. On peut en effet observer que si l'on opère l'homographie H sur le premier membre de l'équation (2), il se reproduit multiplié par ε^β. Sa puissance d'ordre p se reproduit multipliée par $\varepsilon^{p\beta}=1$. Il en résulte que les combinaisons de $x_{\nu+3}$, $x_{\nu+4}$ que l'on rencontrera dans cette puissance seront les mêmes que l'on rencontrera en prenant, de toutes les manières possibles, p des premiers membres des équations (1), distincts ou non.

3. Nous allons traiter plus complètement un exemple, en supposant $\alpha=2$. Nous modifierons nos notations de manière à les simplifier et nous écrirons les équations de la surface F sous la forme

$$x_{\nu+3}^{2i+1}\, x_{\nu+4}^{\nu-i} = \varphi_{\nu+i+1}(x_0, x_1, \ldots, x_{\nu+2}), \qquad (i=0,1,\ldots,\nu),$$
$$x_{\nu+4}^{p} = \varphi(x_0, x_1, \ldots, x_{\nu+2}),$$

où $\varphi_{\nu+i+1}$ est une forme de degré $\nu+i+1$ et φ une forme de degré p.

Nous avons actuellement

$$n=(\nu+1)(\nu+2)\ldots(2\nu)p.$$

Les équations de la surface Φ s'écriront

$$\left\|\begin{matrix} \varphi & \varphi_{\nu+1} & \varphi_{\nu+2} & \cdots & \varphi_{2\nu+1} & \varphi_{2\nu} \\ \varphi_{\nu+1}^2 & \varphi_{\nu+2} & \varphi_{\nu+3} & \cdots & \varphi_{2\nu} & \varphi_p \end{matrix}\right\| = 0.$$

Supposons que le point O_0 soit un point uni de I_p sur la surface F et posons

$$\varphi_{\nu+i+1} \equiv x_0^{\nu+i}\, \alpha_{\nu+i+1}(x_1, x_2, \ldots, x_{\nu+2}) + x_0^{\nu+i+1}\,\beta_{\nu+i+1} + \cdots,$$
$$\varphi \equiv x_0^{p-1}\,\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_{\nu+2}) + x_0^{p-2}\,\beta + \cdots,$$

où les α sont des formes linéaires.

Le cône tangent au point O_0 à la surface Φ a pour équations

$$\left\|\begin{matrix} \alpha & \alpha_{\nu+1} & \alpha_{\nu+2} & \cdots & \alpha_{2\nu-1} & \alpha_{2\nu} \\ 0 & \alpha_{\nu+2} & \alpha_{\nu+3} & \cdots & \alpha_{2\nu} & \alpha_p \end{matrix}\right\| = 0.$$

Il est formé d'un cône d'ordre ν, d'équations

$$\alpha = 0, \quad \left\|\begin{matrix} \alpha_{\nu+1} & \alpha_{\nu+2} & \cdots & \alpha_{2\nu-1} & \alpha_{2\nu} \\ \alpha_{\nu+2} & \alpha_{\nu+3} & \cdots & \alpha_{2\nu} & \alpha_p \end{matrix}\right\| = 0$$

et du plan

$$\alpha_{\nu+2}=0, \quad \alpha_{\nu+3}=0, \ldots, \quad \alpha_p = 0.$$

Ce cône et ce plan ont en commun la droite découpée par ce dernier sur $\alpha = 0$.

Le domaine du point de diramation O_0 sur Φ est équivalent à une courbe rationnelle γ, d'ordre ν, et à une droite s rencontrant γ en un point.

A la section de F par l'hyperplan $x_{\nu+3} = 0$ correspond sur Φ la courbe d'ordre n d'équations

$$\varphi_{\nu+1} = \varphi_{\nu+2} = \dots = \varphi_{2\nu} = \varphi_p = 0$$

et à la section de F par $x_{\nu+4} = 0$ correspond sur Φ la courbe d'ordre n

$$\varphi = 0,\ \varphi_{\nu+1} = 0, \dots, \varphi_{2\nu-1} = 0,\ \varphi_{2\nu} = 0.$$

Nous désignerons ces courbes respectivement par $\gamma_{\nu+3}$, $\gamma_{\nu+4}$.

4. Dans la suite, nous désignerons par $\psi_i\,(x_0, x_1, \dots, x_{\nu+2})$ une forme algébrique de degré i, à coefficients variables.

Considérons les hypersurfaces d'ordre p de $S_{\nu+4}$; elles forment p systèmes linéaires partiels découpant sur F des systèmes linéaires appartenant à l'involution I_p. Les équations de ces p systèmes linéaires partiels peuvent s'écrire

$$\psi_p + \sum_{i=0}^{\nu} x_{\nu+3}^{2i+1}\, x_{\nu+4}^{\nu-i}\, \psi_{\nu-i} + \psi'_0\, x_{\nu+4}^{p} = 0; \tag{1}$$

$$\sum_{i=0}^{k} x_{\nu+3}^{2i}\, x_{\nu+4}^{k-2}\, \psi_{p-k-i} + \sum_{i=0}^{\nu-k} x_{\nu+3}^{2i+1}\, x_{\nu+4}^{\nu+k-i}\, \psi_{\nu-k-i} = 0; \tag{2}$$

$$(k = 1, 2, \dots, \nu);$$

$$\sum_{i=0}^{k} x_{\nu+3}^{2i+1}\, x_{\nu+4}^{k-1}\, \psi_{2\nu-i-k} + \sum_{i=0}^{\nu-k} x_{\nu+3}^{2i}\, x_{\nu+4}^{\nu+k-i+1}\, \psi_{\nu-i-k} = 0. \tag{3}$$

$$(k = 0, 1, \dots, \nu - 1).$$

En tenant compte des équations de F, on voit qu'aux courbes découpées sur F par les hypersurfaces (1) correspondent sur Φ les courbes découpées par les hypersurfaces

$$\psi_p + \sum_{i=0}^{\nu} \varphi_{\nu+i+1}\, \psi_{\nu-i} = 0,$$

c'est-à-dire les courbes du système $|\,p\,\Gamma_0\,|$, où $|\,\Gamma_0\,|$ désigne le système des sections hyperplanes de Φ. On doit supposer $\psi'_0 = 0$, car une des hypersurfaces (1) contient la surface F.

Pour obtenir l'équation des courbes qui correspondent sur Φ aux courbes découpées sur F par les hypersurfaces (2), multiplions les deux membres de l'équation de ces hypersurfaces par $x_{\nu+3}\, x_{\nu+k}^{\nu-k}$. Nous obtenons

$$\sum_{i=0}^{k} \varphi_{\nu+i+1}\, \psi_{p-k-i} + \varphi_{\nu+1} \sum_{i=0}^{\nu-k} \varphi_{\nu+i+1}\, \psi_{\nu-k-i} = 0. \tag{4}$$

Cette équation représente une hypersurface d'ordre $p+\nu-k+1$. Les courbes Γ_{2k}, qui correspondent sur Φ aux courbes découpées sur F par les hypersurfaces (2), sont d'ordre pn. L'hypersurface (4) coupe, en dehors d'une courbe Γ_{2k}, la surface Φ suivant la courbe

$$\varphi_{\nu+1} = \varphi_{\nu+2} = \cdots = \varphi_{\nu+k+1} = 0, \quad \left\| \begin{matrix} \varphi_{\nu+k+2} & \cdots & \varphi_{2\nu} \\ \varphi_{\nu+k+3} & \cdots & \varphi_{p} \end{matrix} \right\| = 0.$$

On peut opérer autrement : Elevons les deux membres de l'équation (2) à la puissance p. En tenant compte des équations de F, on obtient l'équation d'une hypersurface de $S_{\nu+2}$, d'ordre $p^2 n$, ayant un contact d'ordre p avec la surface Φ le long d'une courbe Γ_{2k}.

On parvient à des conclusions analogues pour les courbes découpées sur F par les hypersurfaces (3) et pour les courbes Γ_{2k+1} qui leur correspondent sur Φ. En multipliant les deux membres de l'équation (3) par $x_{\nu+1}^{\nu-k}$, on obtient

$$\sum_{i=0}^{k} \varphi_{\nu+i+1}\, \psi_{2\nu-i-k} + \varphi\psi_{\nu-k} + x_{\nu+1} \sum_{i=1}^{\nu-k} \varphi_{\nu+i}\, \psi_{\nu-i-k} = 0.$$

En dehors de la courbe Γ_{2k+1}, d'ordre pn, cette hypersurface coupe Φ suivant la courbe

$$\varphi = 0, \ \varphi_{\nu+1} = \varphi_{\nu+2} = \cdots = \varphi_{\nu+k+1} = 0, \quad \left\| \begin{matrix} \varphi_{\nu+k+2} & \cdots & \varphi_{\nu p} \\ \varphi_{\nu+k+3} & \cdots & \varphi_{p} \end{matrix} \right\| = 0.$$

Liège, le 16 mars 1948.

Imprimerie M. HAYEZ, rue de Louvain, 112, Bruxelles
(Domicile légal : rue de la Chancellerie, 4)