Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences)
Séance du 16 décembre 1947.

DISCOURS

La Géométrie algébrique,

par Lucien GODEAUX,
Directeur de la Classe.

L'École de Pythagore, la critique des Éléates, conduisirent les géomètres grecs aux Éléments d'Euclide. Dans ces éléments, se trouve introduit un espace abstrait, dont la structure est caractérisée par des postulats qui ne sont d'ailleurs pas tous énoncés explicitement. L'énumération de ces postulats ne devait être faite que beaucoup plus tard, par Hilbert, à la fin du siècle dernier. C'est l'espace d'Euclide qui sert de cadre aux recherches d'Archimède, d'Apollonius, de Diophante,... et qui servira de cadre aux géomètres jusqu'aux découvertes des mathématiciens français du début du XVIIe siècle.

On sait que la géométrie d'Euclide fut très lente à pénétrer dans l'Europe occidentale ; à l'orée du XIIe siècle, elle y était encore totalement inconnue. La géométrie grecque s'introduisit dans nos contrées par deux voies : par l'Italie, venant de Byzance ; par les Universités de Toulouse et de Montpellier, venant des Arabes d'Espagne. Peu à peu, elle s'implante dans l'enseignement des Universités, mais comme nous le disions tantôt, il faut attendre le début du XVIIe siècle pour que des concepts nouveaux, de nouvelles méthodes, viennent étendre le fonds grec. A cette époque, Descartes et Fermat érigent en corps de doctrine la géométrie analytique ; Desargues et Pascal jettent les premières bases de la géométrie projective.

Les idées développées par ces géomètres n'avaient naturellement pas jailli spontanément : on rencontre déjà la notion de coordonnées rectangulaires dès le XIVe siècle, chez Nicole Oresme, mais à cette époque le symbolisme algébrique faisait défaut et si Oresme donne par exemple la condition pour que trois points d'un plan soient en ligne droite, il est obligé de l'exprimer en langage courant. Deux siècles plus tard, Viète devait créer l'instrument nécessaire à l'élaboration de la géométrie analytique. D'un autre côté, les peintres et les architectes de la Renaissance avaient dû utiliser la perspective et leurs considérations ont certainement inspiré Desargues.

Nous voudrions, dans les concepts nouveaux introduits par les quatre géomètres qui viennent d'être cités, relever deux points :

Desargues introduit une première extension de l'espace euclidien, en utilisant des points improprement dits : les points à l'infini, points de concours des droites parallèles. Cette idée, mûrie par les géomètres qui lui succédèrent, devait conduire à la notion de points, de droites et de plan à l'infini, et, d'une manière plus générale, à la notion d'espace projectif réel qui nous est familière aujourd'hui.

Descartes et Fermat n'introduisirent pas de nouveaux éléments, mais un point du plan devint l'ensemble de deux nombres réels : l'abscisse et l'ordonnée. Plus tard, lorsque les géomètres eurent construit la géométrie analytique de l'espace, un point de celui-ci devient l'ensemble de trois nombres réels. L'étude des courbes et des surfaces algébriques devait tout naturellement conduire à introduire des points fictifs : les points imaginaires, ensemble de trois nombres dont l'un au moins est imaginaire. Chez Monge et chez les géomètres de son époque, on rencontre des raisonnements géométriques, où les équations sont sous-entendues, dans lesquels les points réels et imaginaires jouent le même rôle et ne sont plus distingués les uns des autres.

Les géomètres en viennent ainsi à un concept d'espace amplifié : l'espace projectif à points réels et imaginaires. Ils sont même allés beaucoup plus loin, mais nous ne nous occuperons pas de ces extensions, pas plus que des espaces très généraux imaginés par M. Fréchet.

Quelles vont être, à partir du début du XIX^{e} siècle, les préoccupations des géomètres ? Laissons de côté, malgré son intérêt, la partie axiomatique, qui devait notamment conduire à la construction de la géométrie projective indépendamment de l'idée de nombre. Sous l'influence de Poncelet, de Chasles, de Moebius..., les mathématiciens étudieront les propriétés projectives des courbes et des surfaces algébriques. La notion de transformation des figures s'implante et Chasles écrira même que quiconque peut être géomètre, puisqu'il suffit d'appliquer une transformation pour obtenir un nouveau théorème. Cette boutade fut-elle prise trop à la lettre ? Quelques dizaines d'années plus tard, un géomètre italien se plaindra de la place prise par ce qu'il appelle la « tic-tac géométrie » [1]. Peut-être pensait-il que Brianchon eut bien de la chance : son nom est resté attaché à un théorème qui n'est qu'une simple transposition de celui de Pascal. Quoi qu'il en soit, l'usage des transformations devint familier aux géomètres et ceux-ci ne cessent de les employer, mais pour ramener une question à une autre plus simple. Et peut-être est-ce là le véritable sens qu'il faut attribuer à la remarque de Chasles. Au fond, le principe de transport de Hesse et les extensions qu'il a reçues, questions si familières

[1] Cette expression se rencontre dans C. SEGRE, *On some tendencies in geometric investigations* (BULLETIN OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY ,1904, pp. 442-468), traduction d'un article publié en 1891 dans la Rivista di Matematica (Voir note au bas de la page 458). Segre attribue l'expression à l'un de ses Maîtres ; il s'agit d'Enrico d'Ovidio, qui fut professeur à l'Université de Turin.

aujourd'hui aux géomètres, ne peuvent-ils être considérés comme un prolongement de l'idée de Chasles ?

Une des questions qui retint longtemps l'attention des géomètres fut la construction des courbes et des surfaces algébriques. Une conique par exemple est déterminée par cinq de ses points ; comment déterminer les autres points de la conique ? Le théorème de Pascal, qui donne la condition pour que six points appartiennent à une même conique, fournit une solution. D'autres furent trouvées par la suite et étendues aux courbes planes par Chasles, Steiner et les mathématiciens de leur temps. La génération des surfaces fut également étudiée et il convient de rappeler ici un résultat obtenu par un géomètre qui appartint à l'Académie : Le Paige réussit à construire par points une surface du troisième ordre donnée par 19 points. Obervons que s'il est facile de trouver une génération d'une surface, il est plus difficile de montrer que l'on peut obtenir ainsi la surface la plus générale de son ordre. C'est un genre de questions dont on ne s'occupe plus aujourd'hui, bien que certains points ne soient pas élucidés.

Le rôle de la théorie des groupes en géométrie est aujourd'hui classique. La notion de groupe de substitutions, imaginée par un jeune mathématicien de vingt ans, Évariste Galois, a rapidement dépassé le cadre de l'algèbre. L'application de la théorie des groupes à la géométrie a été formulée explicitement pour la première fois par Klein, en 1872, dans le célèbre programme d'Erlangen.

Un groupe de transformations, c'est un ensemble de transformations réversibles, tel que si l'on effectue successivement deux transformations quelconques de l'ensemble, le résultat, que l'on appelle produit des deux transformations, est encore une transformation de l'ensemble. De plus, l'ensemble contient, en même temps qu'une transformation, son inverse. Étant donnés un espace et un groupe de transformations portant sur les points de cet espace, la géométrie qui a pour groupe fondamental le groupe donné, revient à la recherche des propriétés géométriques qui ne sont pas altérées par les transformations du groupe.

Dans sa Géométrie, Euclide appelle figures égales deux figures superposables et postule que deux figures égales à une même troisième, sont égales. Comme l'a remarqué Henri Poincaré, cela implique que la géométrie métrique consiste dans la recherche des propriétés des figures qui sont conservées dans les déplacements de l'espace : translations, rotations et symétries par rapport à un plan, c'est-à-dire dans les transformations qui permettent de superposer une figure à une autre pour vérifier l'égalité de ces deux figures. Mais la Géométrie d'Euclide étudie aussi les figures semblables et il convient d'introduire, à côté des déplacements, les transformations qui changent une figure en une autre, semblable à la première. On y parvient en introduisant les homothéties et on obtient ainsi le groupe des similitudes. D'après Klein, la géométrie euclidienne est l'étude des propriétés qui ne sont pas modifiées par les opérations de ce dernier groupe.

Les déplacements, les similitudes, font correspondre un point à un point, une droite à une droite, un plan à un plan. Il existe d'autres transformations qui possèdent ces propriétés et qui sont du reste complètement définies par ces propriétés ; ce sont les homographies. Celles-ci forment, par leur définition même, un groupe : le groupe projectif. La Géométrie projective a pour groupe fondamental le groupe des homographies. Les déplacements, les similitudes, sont évidemment des homographies particulières, que l'on obtient en imposant aux homographies de laisser fixe soit une figure déterminée, soit une propriété, par exemple de laisser fixe la distance de deux points. On exprime cette dépendance en disant que le groupe des similitudes est un sous-groupe du groupe des homographies, le groupe des déplacements étant à son tour un sous-groupe du groupe des similitudes. Il en résulte que la Géométrie euclidienne est en quelque sorte une géométrie dérivée de la géométrie projective ou, suivant l'expression consacrée, une géométrie subordonnée à la géométrie projective.

Klein est allé plus loin. S'inspirant d'une idée de Cayley, il a montré que les géométries non euclidiennes sont également subordonnées à la géométrie projective. D'une manière précise, le groupe fondamental d'une géométrie non-euclidienne est formé par les homographies qui conservent une certaine quadrique. Ainsi, les géométries de Lobatschefsky et de Riemann viennent prendre place, à côté de la géométrie euclidienne, dans un ensemble logique et harmonieux.

Quelques années plus tôt, en 1866, Cremona avait imaginé des transformations plus générales que les projectivités : les transformations birationnelles ou, comme elles sont souvent appelées, les transformations crémoniennes. Une transformation birationnelle fait aussi correspondre un point à un point, mais à une droite, ou à un plan, correspond une courbe ou une surface. On connaissait un cas particulier de ces transformations : les transformations quadratiques, qui peuvent d'ailleurs se ramener à une transformation élémentaire : l'inversion.

Les transformations birationnelles de Cremona forment évidemment un groupe, mais un groupe d'une nature bien différente de celui des homographies. Alors que celles-ci dépendent de coefficients qui peuvent varier d'une manière continue, la définition des transformations birationnelles introduit certains nombres entiers et le groupe qu'elles forment est par conséquent discontinu. Quoi qu'il en soit, on peut concevoir une géométrie dont le groupe fondamental est celui des transformations birationnelles. C'est cette géométrie que l'on désigne souvent sous le nom de Géométrie algébrique.

Cette géométrie apparaît pour la première fois en 1877 dans un mémoire de Bertini. Ce géomètre s'était proposé de déterminer les transformations birationnelles involutives du plan ; il démontre que toute transformation de cette espèce peut se ramener, par une transformation birationnelle, à l'une de quatre transformations dont il fixe les caractères projectifs.

Chose curieuse, Cremona ne manifesta aucun enthousiasme pour l'idée de son élève et il engagea un jeune géomètre, Caporali, à reprendre la même question en restant dans le cadre projectif. Néanmoins, la géométrie algébrique connut tout de suite un grand succès en Italie, où les géomètres étudièrent surtout les systèmes linéaires de courbes planes et, dans une mesure moindre, les systèmes linéaires de surfaces.

Le fait que ce furent surtout les systèmes linéaires de courbes planes qui furent étudiés, c'est-à-dire que les géomètres s'attachèrent de préférence à la géométrie algébrique plane, s'explique aisément. Vers 1870, Noether, Clifford, Rosanes sont arrivés, simultanément, à ce résultat que toute transformation birationnelle du plan est le produit d'un nombre fini de transformations quadratiques, suivies éventuellement d'une homographie. Ce théorème, dont la démonstration rigoureuse ne fut donnée que beaucoup plus tard, simplifiait évidemment les recherches. Il convient d'ajouter qu'un théorème analogue n'existe pas pour les transformations birationnelles de l'espace. Est-il possible de trouver un ensemble de transformations birationnelles tel qu'en répétant ces transformations, on puisse obtenir toute transformation birationnelle de l'espace ? La question reste en suspens, mais il est bien évident que si un tel ensemble existe, sa structure doit être assez complexe.

Entre temps, Jordan et Halphen en France, Veronese et C. Segre en Italie, Grassmann en Allemagne, d'autres encore, avaient introduit le concept d'espace à un nombre quelconque de dimensions. On serait tenté de dire que ce concept revient à une notation commode. Si l'on considère dans le plan ou dans l'espace ordinaire une famille d'éléments dépendant de r paramètres, on peut convenir d'appeler ces éléments des points d'un espace à r dimensions ; il suffira alors d'un « dictionnaire » approprié pour définir la géométrie de cet espace. Il est curieux de constater d'ailleurs que l'intuition joue parfois plus facilement sur les figures géométriques d'un espace à plus de trois dimensions que sur les figures correspondantes du plan ou de l'espace ordinaire.

Les hyperespaces s'imposèrent rapidement aux géomètres, tant est grande la simplification que leur considération apporte dans une foule de questions. Quelques exemples le feront saisir.

L'étude des séries de couples de points sur une droite se simplifie lorsque l'on remplace la droite par une conique, ce qui peut se faire par des moyens élémentaires. Les couples de points sont alors découpés sur la conique par les droites de son plan et l'étude est ramenée à celle des systèmes de droites du plan. Les séries de groupes de trois points sur une droite ont une interprétation analogue, mais ici la conique doit être remplacée par une cubique gauche. Eh bien, lorsque l'on passe à l'étude des groupes de n points sur une droite, on peut remplacer celle-ci par une courbe rationnelle d'ordre n, appartenant à un espace à n dimensions. Comme l'ont montré simultanément M. G. Castelnuovo en Italie et Fr. Deruyts dans notre pays, l'étude en question devient beaucoup plus simple. La théorie des courbes rationnelles d'ordre n de l'espace à n dimensions, qu'il faut établir au préalable, est d'ailleurs quasi-élémentaire.

Comme l'a fait remarquer C. Segre, les considérations précédentes s'étendent de la géométrie des groupes de points sur une droite à la géométrie des courbes algébriques tracées dans un plan. La simplification, tout aussi grande, est cependant d'une autre nature. A un système linéaire de courbes algébriques d'un plan, on peut en général faire correspondre une surface rationnelle hyperspatiale ; si l'on part de deux systèmes linéaires de courbes qui se correspondent dans une transformation birationnelle, on obtient deux surfaces qui se correspondent dans une homographie. Il en résulte que la classification des systèmes linéaires de courbes planes par rapport au groupe des transformations birationnelles revient à celle des surfaces rationnelles des hyperespaces par rapport au groupe des projectivités. En d'autres termes, une question de géométrie algébrique plane est ramenée à une question de géométrie projective hyperspatiale.

Considérons un espace projectif à r dimensions et, dans cet espace, le groupe des transformations birationnelles. Plaçons dans une même classe les variétés algébriques de l'espace considéré telles que l'on puisse passer de l'une à l'autre par une transformation birationnelle. Un des problèmes de la géométrie algébrique est de caractériser chaque classe de variétés par une variété-type, déterminée en général par un critère projectif. C'est ainsi que dans le problème de la classification des systèmes linéaires de courbes planes, auquel nous faisions allusion tantôt, les géomètres se sont efforcés de caractériser chaque classe de systèmes par celui qui est formé de courbes d'ordre minimum. Le critère projectif introduit ici est donc l'ordre d'une courbe.

C'est le même critère projectif qui a été utilisé par Enriques dans la classification des groupes continus finis de transformations birationnelles du plan et par Enriques et M. Fano pour résoudre le problème analogue dans l'espace.

Le concept de géométrie algébrique appelle une généralisation qui, en fait, a devancé, au moins sous sa forme la plus simple, les recherches auxquelles nous venons de faire allusion. Mais avant de parler de cette généralisation, nous voudrions dire quelques mots d'une autre acquisition de la géométrie algébrique : la théorie des points singuliers des courbes et des surfaces algébriques. Cette théorie avait déjà retenu l'attention de Newton, mais Puiseux et Halphen semblent être les premiers qui y apportèrent des contributions essentielles. Noether, en introduisant la notion de points infiniment voisins, permit de rendre cette étude plus simple et plus accessible. L'idée de Noether a pour origine la remarque suivante : Si deux courbes d'un plan se touchent en un point, celui-ci absorbe en général deux des points d'intersection des deux courbes. On peut dire que tout se passe comme si les deux courbes avaient en commun au point de contact, un point au sens propre du mot et un point, fictif, infiniment voisin du premier. Cette manière de s'exprimer se justifie d'ailleurs si l'on effectue une transformation quadratique dont le point considéré est fondamental ; les courbes se transforment en deux courbes se coupant en un point que l'on peut considérer comme le transformé du point fictif. Ces considérations s'étendent aux cas où les courbes ont des contacts d'ordre supérieur.

Les points infiniment voisins sont donc des points fictifs qui, par des transformations birationnelles convenablement choisies, peuvent être transformés en des points au sens propre du mot. Cette notion permet d'analyser tout point singulier d'une courbe ou d'une surface algébrique sans grandes difficultés ; elle constitue d'autre part une notion commode pour la classification de ces points. Grâce à ces points fictifs, les théorèmes établis par Halphen sont d'un énoncé plus simple. Noether les a introduits en utilisant des transformations birationnelles, mais ils peuvent aussi être définis en partant des développements en séries de Puiseux, comme Enriques l'a montré plus tard.

Revenons à la généralisation dont nous parlions il y a un instant. D'après ce que nous avons dit, deux variétés algébriques appartiennent à la même classe si l'on peut passer de l'une à l'autre par une transformation birationnelle ; cela implique évidemment que ces deux variétés appartiennent à des espaces ayant le même nombre de dimensions. Les coordonnées d'un point d'une des variétés s'expriment en fonctions rationnelles des coordonnées du point homologue de l'autre, mais cette propriété s'étend à tous les couples de points homologues des espaces ambiants. On peut généraliser ce qui précède en plaçant dans une même classe deux variétés liées par une correspondance biunivoque, lorsque les coordonnées d'un point de l'une s'expriment en fonctions rationnelles des coordonnées du point homologue de l'autre, sans que cette propriété s'étende nécessairements aux points des espaces ambiants. Les variétés peuvent d'ailleurs actuellement appartenir à des espaces de dimensions différentes. Par exemple, une courbe gauche et sa projection sur un plan, appartiennent à une même classe. La géométrie ainsi construite porte le nom de Géométrie sur une variété algébrique. Dans le cas où ces variétés sont des courbes, on retrouve d'ailleurs une conception qui remonte à Riemann et qui fut introduite par celui-ci à propos de l'étude des surfaces réelles qui portent son nom. Les géomètres sont allés plus loin. Considérons par exemple une surface réglée algébrique ; rien ne nous empêche de changer notre vocabulaire et d'appeler point une génératrice de la réglée ; celle-ci sera alors appelée courbe. Cela revient évidemment, dans cet exemple simple, à remplacer la surface réglée par une de ses sections planes. Lorsque C. Segre écrit, en 1894, son exposé de la théorie des courbes algébriques, il intitule son travail : « Géométrie sur un être algébrique simplement infini ». C'est une simple question de commodité de langage qui le conduit à appeler point l'élément générateur de l'être, celui-ci étant alors appelé courbe.

L'étude de la géométrie sur une courbe algébrique nécessitait l'emploi d'outils non altérés par le passage d'une courbe à une autre de sa classe. Ces outils sont les séries linéaires de groupes de points, dont l'emploi systématique fut l'œuvre de Brill et Noether. Mais ce sont les géomètres italiens, parmi lesquels il faut citer Bertini, C. Segre, Castelnuovo, Enriques et Severi, qui réussirent à donner à cette théorie son plein épanouissement. Ils réussirent notamment à étudier les séries linéaires de groupes de points en quelque sorte « sans sortir » de la courbe. On peut ainsi définir sur la courbe certaines opérations qui, appliquées à une série linéaire quelconque, conduisent à une série linéaire : la série canonique, toujours la même quelle que soit la série dont on est parti. La série canonique est invariante vis-à-vis des transformations birationnelles de la courbe. Ces recherches sont naturellement en relation étroite avec la théorie des intégrales abéliennes et ici, comme dans tant d'autres questions, l'analyse et la géométrie se prêtent un mutuel appui. Leur emploi simultané permet une vue plus claire et plus profonde des propriétés des courbes algébriques.

Le problème principal qui se pose est naturellement de caractériser les courbes d'une même classe ou, en d'autres termes, d'introduire certains caractères tels que, si ces caractères sont les mêmes pour deux courbes algébriques, elles appartiennent à une même classe. En un sens, ce problème est résolu ; on sait que si deux courbes ont même genre et si certaines expressions des coefficients des équations des courbes, appelées modules, sont les mêmes, les deux courbes appartiennent à une même classe. Mais il reste cependant bien des problèmes à résoudre ; bornons-nous à en signaler un. R. Torelli a établi que si deux courbes algébriques ont même genre et même tableau de périodes des intégrales abéliennes de première espèce, elles appartiennent à une même classe. Il y a donc des relations entre ces périodes et les modules d'une courbe. Quelles sont-elles ?

Peut-être aussi une comparaison fouillée de la théorie des séries de groupes de points sur une courbe algébrique et de la représentation des coordonnées des points de cette courbe par les fonctions fuchsiennes de Poincaré serait-elle de nature à éclairer les propriétés des courbes algébriques et à en découvrir de nouvelles.

La géométrie sur une surface algébrique est la suite logique de la géométrie sur une courbe algébrique, mais elle est tout autre chose qu'une extension facile. On peut par exemple définir de plusieurs manières le genre d'une courbe algébrique, mais l'extension de ces définitions aux surfaces donne, en général, des caractères distincts de celles-ci. Parfois aussi, des propriétés des courbes qui s'établissent par des procédés élémentaires, s'étendent aux surfaces, mais pour les démontrer, il faut avoir recours à des considérations beaucoup plus élevées, n'ayant aucun point commun avec celles qui ont été utilisées pour les courbes. Il en résulte que les analogies entre les courbes et les surfaces algébriques sont en quelque sorte fragmentaires ; c'est d'ailleurs un des attraits de ces questions.

Les premières recherches sur les surfaces algébriques, dans le cadre considéré ici, remontent à Cayley et à Clebsch. Noether tenta un exposé systématique des propriétés des surfaces, mais ses démonstrations sont souvent pénibles et compliquées. Malgré le mérite de son auteur, cet exposé ne jette pas grande lumière sur la question. Il appartenait à Enriques d'établir la théorie sur des bases harmonieuses ; le mémoire qu'il a publié en 1896 restera nécessairement le fondement de la géométrie sur un être algébrique doublement infini.

Les instruments de recherche sont les systèmes linéaires de courbes tracées sur une surface et une certaine opération ; l'opération d'adjonction, qui associe à un système linéaire de courbes un second système linéaire dont les courbes découpent sur celles du premier la série canonique. Le second système est l'adjoint au premier. On arrive ainsi à construire sur une surface un système linéaire de courbes : le système canonique, qui, ajouté à un système linéaire quelconque, donne l'adjoint à celui-ci. Sur deux surfaces de la même classe, les systèmes canoniques se correspondent. De plus, et ce fut là une idée heureuse, Enriques considère les multiples du système canonique et montre qu'ils fournissent de nouveaux caractères invariants des surfaces, ce qui n'avait pas lieu pour les courbes. Enriques montre en outre, sur un exemple, que le double du système canonique peut exister alors que le système canonique n'existe pas. Cela devait mettre M. Castelnuovo sur la voie d'un résultat important : les conditions de rationnalité d'une surface.

De 1896 à 1900, M. Castelnuovo et Enriques développèrent la théorie des systèmes linéaires de courbes tracées sur une surface algébrique et montrèrent la fécondité des résultats obtenus en appliquant leur théorie à de nombreuses surfaces particulières.

En général, si l'on considère sur une surface algébrique les courbes d'ordre et de genre donnés, ces courbes se distribuent en un nombre fini de systèmes linéaires. Mais il y a des exceptions dont la plus simple est fournie par les surfaces réglées irrationnelles. Sur ces surfaces exceptionnelles, appelées surfaces irrégulières, les courbes d'ordre et de genre donnés se distribuent en un nombre fini de systèmes continus non linéaires ; d'une manière précise, elles se distribuent en un nombre fini d'ensembles continus de systèmes linéaires. D'un autre côté, Picard, généralisant la théorie des intégrales abéliennes, a attaché à une surface algébrique des intégrales de différentielles totales, aujourd'hui appelées intégrales de Picard. En général, une surface ne possède pas d'intégrales de Picard restant finies sur toute la surface, c'est-à-dire ce que l'on appelle des intégrales de Picard de première espèce. Celles qui en possèdent sont exceptionnelles. Certains indices portèrent M. Castelnuovo et Enriques à penser qu'il y avait identité entre ces surfaces et les surfaces irrégulières. Dès 1894, G. Humbert établit qu'une surface contenant un système continu non linéaire de courbes possède des intégrales de Picard de première espèce. Quelques années plus tard, Enriques démontra la propriété inverse. Il y a donc identité entre les surfaces considérées, mais la réponse à la question posée était qualitative ; il importait d'en obtenir une réponse quantitative. Ce fut l'œuvre de trois géomètres italiens : Enriques, M. Castelnuovo et M. Severi. Elle leur coûta trois années d'efforts, de 1902 à 1905. Pendant ce laps de temps, chacun apporte sa pierre à l'édifice ; la lecture de leurs mémoires est extrêmement attrayante, on sent la fièvre qui les anime. L'instrument de recherche n'est plus le système linéaire de courbes, mais le système continu non linéaire. Une propriété fondamentale de ces systèmes est obtenue par Enriques et bientôt après M. Castelnuovo et M. Severi en déduisent simultanément, mais par des voies différentes, le résultat final. Un certain nombre, dont la définition est géométrique, l'irrégularité de la surface, est égal au nombre d'intégrales de Picard de première espèce, attachées à la surface. La démonstration de ce théorème a été reprise récemment par M. B. Segre, qui lui a donné une forme définitive.

Deux des derniers mémoires de Poincaré sont consacrés au beau théorème de Castelnuovo-Enriques-Severi. Poincaré en donne une démonstration basée sur les relations entre les intégrales de Picard attachées à une surface et les intégrales abéliennes attachées aux courbes tracées sur la surface. Les développements de Poincaré furent le point de départ de beaux travaux de M. Lefschetz.

La construction des systèmes de courbes tracées sur une surface algébrique soulève quelques problèmes intéressants. On peut se demander s'il est possible d'obtenir ces systèmes en partant d'un nombre fini d'entre eux et en opérant par addition et soustraction. La réponse est affirmative et est due à M. Severi ; celui-ci est parvenu à ce résultat en utilisant une propriété, due à Picard, des intégrales de Picard présentant des singularités logarithmiques. Cette théorie de la base a conduit M. Severi à des résultats extrêmement intéressants. Sur certaines surfaces, il existe des systèmes distincts de courbes dont les multiples coïncident. En d'autres termes, la division d'un système de courbes, lorsqu'elle est possible, n'est pas toujours une opération univoque. Cette question est en relation étroite avec ce que l'on a appelé les diviseurs de zéro sur la variété réelle à quatre dimensions attachée à une surface algébrique au sens de Riemann. On ne saurait trop insister sur le fait que, dans l'étude de la géométrie sur un être algébrique, les théories analytiques, géométriques et topologiques se pénètrent et permettent d'obtenir plus de clarté dans les questions traitées.

Comme dans la géométrie sur une courbe algébrique, le principal objet de la géométrie sur une surface est de caractériser chaque classe de surfaces. Il semble que l'on soit encore bien éloigné de la solution de ce problème et il reste là un vaste champ à explorer.

Les systèmes de courbes tracées sur une surface algébrique, dont il a été question jusqu'à présent, constituent la généralisation la plus simple et la plus immédiate des séries de groupes de points appartenant à une courbe algébrique, mais on peut également édifier une théorie des groupes de points appartenant à une surface. C'est ce qu'a fait M. Severi, dans ces quinze dernières années, dans une série de mémoires d'un grand intérêt.

Dans la géométrie sur une variété algébrique à trois dimensions, on se heurte à de nouvelles difficultés et cette théorie est à peine ébauchée. On ne connaît même pas les conditions de rationnalité d'une variété. Il convient peut-être ici d'entrer dans quelques détails. Clebsch a établi que la condition pour qu'une courbe soit rationnelle est que son genre soit nul et la démonstration de ce théorème est élémentaire. Comme nous l'avons dit plus haut, c'est M. Castelnuovo qui a réussi à donner les conditions pour qu'une surface soit rationnelle : son irrégularité doit être nulle et le double de son système canonique ne peut exister. En partant de ces données, le savant géomètre a montré l'existence, sur la surface, de systèmes linéaires de courbes qui caractérisent les surfaces rationnelles. Il n'y a aucune analogie entre les démonstrations des théorèmes de Clebsch et de M. Castelnuovo. Si l'on passe aux variétés à trois dimensions, on n'aperçoit même pas quelle peut être la solution du problème analogue. Comme l'écrivait un jour M. Fano, à qui l'on doit de profondes recherches sur les variétés algébriques, il semble que la géométrie sur une variété algébrique doive, pendant quelque temps encore, revêtir un caractère expérimental. Il faut étudier des variétés algébriques particulières dans tous leurs détails et tâcher d'apercevoir un lien entre leurs propriétés. C'est au fond la méthode que l'on a suivie au début dans l'étude des surfaces, en considérant celles qui contiennent des systèmes de courbes de genre peu élevé.

Il convient cependant de signaler d'importantes recherches de M. G. De Rham et de M. Hodge sur les intégrales attachées à une variété algébrique. Elles ont conduit M. Kähler à utiliser, pour retrouver certains invariants de ces variétés, la théorie des formes différentielles due à M. Élie Cartan. Cette dernière théorie fut également le point de départ de M. Eger dans la construction des systèmes canoniques des variétés irrégulières.

Nous avons essayé de montrer comment les géomètres furent conduits à l'étude de la géométrie sur une variété algébrique. Malgré les propriétés importantes qui ont été découvertes, il reste encore beaucoup à faire dans ce domaine ; il semble même que la théorie soit arrivée à un point mort. On pourrait dire que dans le jardin de la géométrie algébrique, on a cueilli beaucoup de roses... et qu'il y reste beaucoup d'épines ! Peut-être est-ce la raison pour laquelle, — que l'on nous pardonne l'expression — cette géométrie n'est plus « à la mode ». Peut-être aussi les méthodes d'investigation imaginées jusqu'à présent par les géomètres ont-elles donné tout ce qu'elles pouvaient donner et faut-il de nouveaux leviers pour aller plus loin ? Des tentatives ont été faites, mais il faut bien avouer que si elles ont conduit à préciser les fondements, à rendre plus rigoureuses certaines démonstrations, elles n'ont pas apporté de résultats essentiellement nouveaux ni permis d'introduire de nouveaux invariants. La question reste donc ouverte et il faut souhaiter que les efforts des géomètres se tournent à nouveau vers l'étude des fonctions algébriques, les plus simples que l'on rencontre en Mathématiques et qui sont encore si mal connues.