Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences)
Séance du samedi 6 mars 1948.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur la construction de surfaces doubles,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Dans nos travaux antérieurs [1], nous avons établi le théorème suivant :

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface algébrique représente une involution du second ordre n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique, sont que :

a) *La surface possède un nombre multiple de quatre de points doubles coniques* ; b) *Il existe une hypersurface d'ordre pair passant par les points doubles et touchant la surface en chaque point d'intersection.*

Dans cette note, nous faisons une application de ce théorème. Nous considérons une surface cubique possédant quatre points doubles coniques. On sait qu'une telle surface possède un réseau de cubiques gauches passant par les quatre points doubles et que, le long de chacune de ces cubiques gauches, il y a un cône du second ordre inscrit dans la surface [2]. La surface représente

[1] *Mémoire sur les surfaces algébriques doubles ayant un nombre fini de points de diramation* (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1914, pp. 289-312) ; *Sur la construction des surfaces doubles n'ayant qu'un nombre fini de points de diramation* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1944, pp. 213-225). Voir aussi notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Paris, Hermann, 1935).

[2] *Sur l'inversion et sur une surface cubique à quatre points doubles* (Mathesis, 1922, pp. 19-23).

l'involution du second ordre engendrée dans un plan par une transformation quadratique involutive. Une transformée rationnelle de la surface cubique, obtenue en faisant correspondre aux plans de l'espace des surfaces d'ordre n d'un système linéaire triplement infini tout-à-fait général, donne des surfaces d'ordre $3n$, ayant $4n^3$ points doubles coniques. Sur cette surface, il y a un système linéaire de courbes passant par les $4\,n^3$ points doubles et le long de chacune desquelles une surface d'ordre $2n$ est inscrite dans la surface. Notre théorème est donc applicable à cette surface.

1. Considérons, dans un plan σ, la transformation quadratique involutive

$$x_1' \, x_1 = x_2' \, x_2 = x_3' \, x_3.$$

Le système linéaire ∞^6 des cubiques circonscrites au triangle de référence est transformé en lui-même et contient deux systèmes linéaires composés au moyen de l'involution I_2, d'ordre deux, engendrée par la transformation. Posons :

$$\left.\begin{aligned}
\rho X_0 &= (x_2 + x_3)(x_3 + x_1)(x_1 + x_2),\\
\rho X_1 &= (x_2 + x_3)(x_3 - x_1)(x_1 - x_2),\\
\rho X_2 &= (x_2 - x_3)(x_3 + x_1)(x_1 - x_2),\\
\rho X_3 &= (x_2 - x_3)(x_3 - x_1)(x_1 + x_2),\\
\rho Y_1 &= (x_2 - x_3)(x_3 + x_1)(x_1 + x_2),\\
\rho Y_2 &= (x_2 + x_3)(x_3 - x_1)(x_1 + x_2),\\
\rho Y_3 &= (x_2 + x_3)(x_3 + x_1)(x_1 - x_2).
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Le premier système appartenant à l'involution I_2 est

$$\lambda_0 X_0 + \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 = 0$$

et le second,

$$\mu_1 Y_1 + \mu_2 Y_2 + \mu_3 Y_3 = 0.$$

Si nous interprétons X_0, X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3

comme coordonnées d'un point d'un espace linéraire S_6 à six dimensions, nous remplaçons le plan σ par une surface F, d'ordre six, à sections hyperplanes elliptiques, sur laquelle l'involution I_2 est engendrée par l'homographie

$$\frac{X'_0}{X_0} = \frac{X'_1}{X_1} = \frac{X'_2}{X_2} = \frac{X'_3}{X_3} = \frac{Y'_1}{-Y_1} = \frac{Y'_2}{-Y_2} = \frac{Y'_3}{-Y_3}. \quad (2)$$

Les équations de la surface F peuvent s'écrire

$$Y_2Y_3 = X_0X_1, \quad Y_3Y_1 = X_0X_2, \quad Y_1Y_2 = X_0X_3,$$
$$X_1Y_1 = X_2Y_2 = X_3Y_3 = -X_0\ (Y_1 + Y_2 + Y_3),$$
$$X_0X_2 + X_0X_3 + X_2X_3 + Y_1^2 = 0,$$
$$X_0X_3 + X_0X_1 + X_3X_1 + Y_2^2 = 0,$$
$$X_0X_1 + X_0X_2 + X_1X_2 + Y_3^2 = 0.$$

Les axes de l'homographie (2) sont un espace à trois dimensions $Y_1 = Y_2 = Y_3 = 0$ et un plan $X_0 = X_1 = X_2 = X_3 = 0$. L'espace à trois dimensions coupe F suivant les quatre points unis de I_2 ; nous désignerons ces points unis par 0_0 (1, 0, 0, 0), 0_1 (0, 1, 0, 0), 0_2 (0, 0, 1, 0), 0_3 (0, 0, 0, 1).

Pour obtenir une image de l'involution I_2, projetons la surface F du plan $X_0 = X_1 = X_2 = X_3 = 0$ sur l'espace à trois dimensions $Y_1 = Y_2 = Y_3 = 0$. Nous obtenons une surface Φ d'équation

$$X_1X_2X_3 + X_2X_3X_0 + X_3X_0X_1 + X_0X_1X_2 = 0.$$

C'est une surface cubique, présentant des points doubles coniques aux quatre points de diramation O_0, O_1, O_2, O_3.

Aux courbes découpées sur F par les hyperplans

$$\lambda_1Y_1 + \lambda_2Y_2 + \lambda_3Y_3 = 0$$

correspondent sur Φ les courbes découpées par les quadriques

$$\lambda_1^2 (X_0X_2 + X_0X_3 + X_2X_3) - 2\lambda_2\lambda_3X_0X_1$$
$$+ \lambda_2^2 (X_0X_3 + X_0X_1 + X_3X_1) - 2\lambda_3\lambda_1X_0X_2$$
$$+ \lambda_3^2 (X_0X_1 + X_0X_2 + X_1X_2) - 2\lambda_1\lambda_2X_0X_3 = 0.$$

Ces quadriques sont des cônes passant par les points de diramation et inscrites à la surface le long de cubiques gauches.

2. Soient maintenant

$$\phi_0\ (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = 0,\ \phi_1 = 0,\ \phi_2 = 0,\ \phi_3 = 0$$

quatre surfaces d'ordre n n'ayant aucun point commun et telles que trois de ces surfaces aient en commun n^3 points distincts.

Considérons la surface Φ_0, d'ordre $3n$, d'équation

$$\phi_1\phi_2\phi_3 + \phi_2\phi_3\phi_0 + \phi_3\phi_0\phi_1 + \phi_0\phi_1\phi_2 = 0.$$

Chacun des n^3 points communs à trois quelconques des surfaces données est double conique pour la surface Φ_0, qui possède ainsi $4\ n^3$ points doubles coniques.

Nous désignerons par $|\Gamma|$ le système de courbes d'ordre $3n^2$, découpé sur la surface Φ_0 par les surfaces

$$\lambda_0\,\phi_0 + \lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2 + \lambda_3\phi_3 = 0.$$

Les courbes Γ ne passent pas par les $4\ n^3$ points doubles de Φ_0.

Considérons en outre les surfaces

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_1^2 (\phi_0\phi_2 + \phi_0\phi_3 + \phi_2\phi_3) - 2\lambda_2\,\lambda_3\,\phi_0\,\phi_1 \\ &+ \lambda_2^2 (\phi_0\phi_3 + \phi_0\phi_1 + \phi_3\phi_1) - 2\,\lambda_3\,\lambda_1\,\phi_0\,\phi_2 \\ &+ \lambda_3^2 (\phi_0\phi_1 + \phi_0\phi_2 + \phi_1\phi_2) - 2\,\lambda_1\,\lambda_2\,\phi_0\,\phi_3 = 0. \end{aligned}\right| \qquad (3)$$

Ces surfaces, d'ordre $2n$, passent par les $4n^3$ points doubles coniques de Φ_0 et touchent cette surface en chaque point d'intersection. Les courbes de contact, d'ordre $3n^2$, seront désignées par Γ_1.

Chaque point double conique de Φ_0 est équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à une courbe rationnelle de degré — 2. Les courbes rationnelles équivalentes à deux points doubles ne se rencontrent évidemment pas. Nous désignerons par $\varDelta$ la somme de ces $4\,n^3$ courbes.

Le fait que les surfaces (3) touchent $\varPhi_0$ en chaque point d'intersection et passent par les $4\,n^3$ points doubles de cette surface, se traduit par l'égalité fonctionnelle

$$2\,\varGamma_1 + \varDelta \equiv 2\,\varGamma.$$

Si nous désignons par $\varGamma_0$ les sections planes de la surface $\varPhi_0$, nous pouvons écrire cette relation sous la forme

$$2\,\varGamma_1 + \varDelta \equiv 2n\,\varGamma_0.$$

Il résulte du théorème rappelé au début que la surface $\varPhi_0$ est l'image d'une involution I_2, d'ordre deux, appartenant à une surface F_0 et présentant $4n^3$ points unis. Les points de diramation, sur la surface $\varPhi_0$, sont les $4n^3$ points doubles coniques de $\varPhi_0$.

3. Le genre arithmétique de la surface $\varPhi_0$ est

$$p'_a = \frac{1}{2}\,(n - 1)\,(3n - 1)\,(3n - 2).$$

Le genre arithmétique p_a de F_0 est donné par la formule

$$12\,(p_a + 1) = 24\,(p'_a + 1) - 3.4\,n^3.$$

On a donc

$$p_a = (n - 1)\,(8n^2 - 10n + 1).$$

Le genre linéaire de $\varPhi_0$ est égal à $3n\,(3n - 4)^2 + 1$, donc le genre linéaire de F_0 est

$$p^{(1)} = 6n\,(3n - 4)^2 + 1.$$

La surface $\varPhi_0$, ne possédant comme seules singularités que des points doubles coniques, est régulière. Désignons par $|K|$ son système canonique, découpé par les surfaces d'ordre $3n - 4$. Au système $|K|$ correspond, sur F_0, des courbes $\overline{K}$ appartenant totalement au système canonique $|\overline{K}|$ de cette surface. Étant donnée la valeur de p_a, le système $|\overline{K}|$ est plus ample que $|K|$ et contient un second système linéaire partiel appartenant à l'involution I_2 et dont les courbes passent par les $4n^3$ points unis de cette involution. A ces courbes correspondent sur Φ_0 des courbes que nous désignerons par K_0 et donnant lieu à l'égalité fonctionnelle

$$2K_0 + \Delta \equiv 2\,K \equiv 2\,(3n - 4)\,\Gamma_0.$$

Le degré et le genre des courbes K_0 sont respectivement

$$3n\,(4n - 3)^2 - 2n^3, \qquad 3n\,(3n - 4)^2 - (n^3 - 1).$$

Si $p_g \geqslant p_a$ est le genre géométrique de la surface F, on a dans $|\overline{K}|$ deux systèmes appartenant à l'involution I_2 et dont les dimensions $p_a' - 1$, r, sont, d'après la théorie des homographies, liées par la relation

$$p_a' - 1 + r + 2 = p_g,$$

d'où $r = p_g - p_a' - 1$. On a donc

$$r \geqslant (n - 1)\,(8n^2 - 10n + 1) - \frac{1}{2}\,(n - 1)\,(3n - 1)\,(3n - 2) - 1,$$

c'est-à-dire

$$r \geqslant \frac{1}{2}\,n\,(n - 1)\,(7n - 11) - 1.$$

Le théorème de Riemann-Roch, appliqué au système $|K_0|$, certainement non spécial, donne la même limite inférieure par la dimension r de ce système.

4. Retournons à la surface (3) et cherchons le nombre de points doubles de cette surface situés par la courbe de contact Γ_1 avec la surface Φ_0.

La surface Φ_0 ayant $4n^3$ points doubles sur Γ_1, les plans tangents, à Φ_0 et à la surface (3) le long de Γ_1 engendrent une développable de classe

$$\delta = 3n^2\ (3n - 1) - 4n^3.$$

La première polaire d'un point M par rapport à la surface (3) est d'ordre $2n - 1$ et coupe Γ_1 aux δ points de contact des plans tangents à la surface passant par M et aux points doubles de la surface situés sur Γ_1. Le nombre de ces points doubles est donc

$$3n^2\ (2n - 1) - \delta = n^3.$$

La surface (3) possède donc n^3 points doubles sur la courbe de contact Γ_1 avec la surface Φ_0.

5. Considérons en particulier le cas $n = 2$. La surface Φ_0 est alors d'ordre six et possède 32 points doubles coniques. Les surfaces (3) sont du quatrième ordre et possèdent huit points doubles coniques sur la courbe Γ_1 de contact avec Φ_0, courbe actuellement du douzième ordre.

La surface Φ_0 est de genres $p_a = p_g = 10$, $p^{(1)} = 25$. La surface F_0 est de genre $p_a = 13$, $p^{(1)} = 49$.

Les courbes K_0 coïncident actuellement avec les courbes Γ_1 ; le système $|K_0|$ est de degré huit et de genre 17. Sa dimension est $r \geqslant 2$.

Les courbes K_0 découpent sur une section plane Γ_0, une série d'ordre 12 certainement non spéciale, car les courbes K_0 ne peuvent appartenir à des adjointes aux sections planes de Φ_0. Les courbes Γ_0 étant de genre dix, la série considérée, g^2_{12}, a la dimension deux. Si donc $|K_0|$ est de dimension $r > 2$, il existe au moins une courbe K_0 contenant une courbe Γ_0 comme partie. Mais alors, la courbe $K_0 - \Gamma_0$ est du sixième ordre et il existe une quadrique touchant la surface Φ_0 le long de cette courbe. De plus, cette quadrique doit passer par les 32 points doubles de Φ_0, ce qui est impossible, car cette quadrique contiendrait toutes les courbes K_0.

On voit donc que $r = 2$; le système $|K_0|$ est un réseau et le genre géométrique de F_0 est $p_g = p_a = 13$.

En rapportant projectivement les courbes canoniques de F_0 aux hyperplans d'un espace linéaire S_{12} à 12 dimensions, on obtient comme modèle projectif de F_0 une surface projectivement canonique, d'ordre 48.

Liège, le 17 février 1948.