Extrait du *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liège.*
Séance du 21 février 1946. — N° 2.

Sur les surfaces algébriques ayant une courbe double tracée sur une surface du quatrième ordre,

par Lucien GODEAUX, Membre de la Société.

Notre but, dans cette note, est de construire des surfaces algébriques dont la courbe double forme l'intersection complète de la surface et d'une surface du quatrième ordre. La courbe double possède un certain nombre de points triples, triples également pour la surface, et ces points sont doubles pour la surface du quatrième ordre. Si F est la surface d'ordre n que l'on se propose de construire et D sa courbe double, il existe des surfaces d'ordre n inscrites dans la surface du quatrième ordre le long de la courbe D. Nous sommes ainsi conduit à utiliser les résultats de G. Humbert sur la surface de Kummer [1] et les nôtres sur la surface-enveloppe d'une série simplement infinie de quadriques, d'indice deux, ayant huit points-base distincts (formant un groupe de Lamé). On sait qu'une telle surface représente une involution du second ordre appartenant à une surface intersection de trois hyperquadriques de l'espace linéaire à cinq dimensions [2].

Nous nous bornons à indiquer la valeur du genre géométrique des surfaces trouvées. Ces surfaces sont évidemment régulières.

1. Soit F une surface algébrique d'ordre $n > 4$ possédant comme seules singularités une courbe double D d'ordre $2n$ et τ points triples à la fois pour la surface et pour la courbe D. En un de ces points triples, nous supposerons que les trois tangentes à la courbe D sont les arêtes d'un trièdre proprement dit, ce qui est le cas général.

Nous ferons l'hypothèse que la courbe D est l'intersection complète de la surface F et d'une surface Φ, du quatrième ordre. Celle-ci a nécessairement des points doubles, en général coniques, aux points triples de la courbe D.

---

(1) G. Humbert, Théorie générale des surfaces hyperelliptiques (*Journal de Liouville*, 1893) et *Œuvres de G. Humbert*, t. II (Paris, Gauthier-Villars, 1936).

(2) Mémoire sur les surfaces algébriques doubles ayant un nombre fini de points de diramation (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1914, pp. 289-312); Mémoire sur les involutions appartenant à une surface de genres un (*Annales de l'École normale supérieure*, 1914, pp. 357-430; 1919, pp. 51-70); Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (Paris, Hermann, 1935).

Considérons une surface Ψ, d'ordre $n-4$, passant par les τ points triples de la courbe D, mais ne contenant pas cette courbe. Désignons par $P_1, P_2, \ldots, P_\tau$ les τ points triples de D. Les surfaces F et $\Phi+\Psi$ déterminent un faisceau $|F'|$ de surfaces F', ayant des points triples en $P_1, P_2, \ldots, P_\tau$ et inscrites dans la surface Φ le long de la courbe D.

Sur la surface Φ, les τ points doubles coniques $P_1, P_2, \ldots, P_\tau$ sont équivalents à des courbes rationnelles de degré -2 que nous désignerons respectivement par $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\tau$. Si Γ sont les sections planes de la surface Φ, nous avons, sur cette surface, la relation fonctionnelle

$$n\,\Gamma \equiv 2\,D + 3\,(\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_\tau).$$

La surface Φ, du quatrième ordre, n'ayant que des points doubles coniques, est de genres un ($p_a = P_4 = 1$) et ceci va nous permettre de calculer le genre de la courbe D. Sur Φ, un système linéaire de courbes de genre π a en effet le degré $2\pi-2$ et la dimension π. La relation fonctionnelle précédente donne, pour le degré de la courbe D,

$$[D\,D] = n^2 - \frac{\varphi}{2}\,\tau.$$

Le genre de la courbe D est donc

$$\pi = \frac{1}{2}\,n^2 - \frac{9}{4}\,\tau + 1.$$

2. Considérons une surface générique F' du faisceau $|F'|$, inscrite dans la surface Φ. La première polaire d'un point M quelconque par rapport à Φ est une surface cubique passant par les τ points doubles de Φ et coupant encore D en

$$\delta = 6n - 3\tau$$

points. En chacun de ces points, le plan tangent à Φ, et par suite à F', passe par M. On en conclut que la développable Δ lieu des plans tangents à Φ et à F' aux points de D est de classe δ. La première polaire du point M par rapport à F' est une surface d'ordre $n-1$ passant deux fois par les τ points triples de D et par les δ points de contact des plans tangents à F' menés par M. Les autres points sont nécessairement doubles pour F' et par conséquent cette surface possède

$$2\,n\,(n-4) - 3\tau$$

points doubles sur la courbe D. Nous désignerons ce groupe par G.

Lorsque la surface F′ varie dans le faisceau $|F'|$, le groupe G reste fixe, puisque ses points sont doubles pour la surface F. De plus, la surface $\Phi+\Psi$ doit également avoir les points du groupe G pour points doubles et la surface Ψ doit donc contenir ce groupe. Remarquons d'ailleurs qu'en dehors des points $P_1, P_2, \ldots, P_\tau$, la surface Ψ rencontre D en $2n(n-4)-3\pi$ points.

3. Supposons maintenant que nous ayons pu construire une surface F'_1 d'ordre n, inscrite dans la surface Φ le long de la courbe D et ayant par conséquent des points triples en $P_1, P_2, \ldots, P_\tau$. Le raisonnement fait plus haut est encore valable et la surface F′ possède encore un groupe G de $2n(n-4)-3\tau$ points doubles sur la courbe D.

Considérons encore une surface Ψ, d'ordre $n-4$, passant par les points $P_1, P_2, \ldots, P_\tau$, mais non par les points du groupe G. Les surfaces F'_1, $\Phi+\Psi$ déterminent un faisceau $|F'|$ de surfaces inscrites dans la surface Φ le long de D. Chacune des surfaces de ce faisceau possède un groupe G de points doubles, mais ce groupe est variable. La série formée par les ∞^1 groupes G ainsi déterminés est d'ailleurs rationnelle, puisque en correspondance biunivoque avec le faisceau $|F'|$.

Soient R un point de D et r une droite passant par R mais non tangente en ce point à la surface Φ. Il existe une surface du faisceau $|F'|$ touchant r en R et ayant par conséquent un point double en R. Ce point appartient donc au groupe G relatif à cette surface. Il en résulte que la série des groupes G est d'indice un et, comme elle est rationnelle, c'est une série linéaire. La surface $\Phi+\Psi$ a comme groupe G le groupe des points d'intersection de la surface Ψ avec la courbe D, en dehors des points $P_1, P_2, \ldots, P_\tau$. La série linéaire $|G|$ et la série découpée sur D par les surfaces Ψ, en dehors des points triples de D, appartiennent donc à une même série linéaire.

4. Conservons l'hypothèse que nous avons construit une surface F′ inscrite dans Φ le long de la courbe D et supposons en outre qu'il existe une surface Ψ contenant le groupe G des points doubles de F′ situés sur D. Les surfaces F′ et $\Phi+\Psi$ déterminent un faisceau de surfaces ayant des points triples en $P_1, P_2, \ldots, P_\tau$ et des points doubles aux points du groupe G.

Il existe une surface de ce faisceau tangente en un point R de D à une droite non tangente à Φ en ce point. Cette surface, que nous désignerons par F, a un point double en R. Cela étant, reprenons la première polaire d'un point M quelconque par rapport à F. Elle passe deux fois par chacun des points $P_1, P_2, \ldots, P$, par les δ points où les plans tangents à F et à Φ passent par M, par les points du groupe G et par le point R. Il en résulte qu'elle contient D. Comme le point M a été choisi arbitrairement, la courbe D appartient aux premières polaires de F et est donc double pour cette surface.

Nous voyons donc que la construction de la surface F, d'ordre n, ayant D comme courbe double, revient à la construction d'une surface F' inscrite dans Φ le long de D et d'une surface Ψ passant par le groupe des points doubles de F' sur D.

5. Nous supposerons, dans ce qui va suivre, $n > 8$. Les surfaces Ψ d'ordre $n-4$, passant simplement par les points $P_1, P_2, \ldots, P_\tau$, seront supposées ne pas contenir la surface Φ comme partie. Dans ces conditions, la dimension du système $|\Psi|$ sera égale à celle du système découpé sur Φ par les surfaces Ψ, c'est-à-dire du système

$$|(\Phi, \Psi)| = |(n-4)\Gamma - \gamma_1 - \gamma_2 - \ldots - \gamma_\tau|.$$

Le degré de ce système est égal à

$$4(n-4)^2 - 2\tau;$$

par conséquent, son genre et sa dimension sont égaux à

$$2(n-4)^2 - \tau + 1.$$

Les courbes (Φ, Ψ) découpent sur la courbe D des groupes G. Observons que la courbe D étant de genre $\frac{1}{2}n^2 - \frac{9}{4}\tau + 1$, sa série canonique est d'ordre $n^2 - \frac{9}{2}\tau$. D'autre part, la série $|G|$ est d'ordre $2n(n-4) - 3\tau$. Par conséquent, puisque $n > 8$, l'ordre de $|G|$ est supérieur à celui de la série canonique et la série $|G|$ est non spéciale. La dimension de la série complète $|G|$ est donc, d'après le théorème de Riemann-Roch,

$$\frac{3}{2}n^2 - 8n - \frac{3}{4}\tau - 1 = \frac{n}{2}(3n - 16) - \frac{3}{4}\tau - 1.$$

La dimension du système $|(\Phi, \Psi)|$ est donc supérieure ou égale à celle de la série complète $|G|$, sauf si $n=9$, $\tau=14$. Laissons pour le moment ce cas de côté. Dans les autres cas, la série complète $|G|$ est découpée sur D par les surfaces Ψ et par conséquent s'il existe une surface F' inscrite dans Φ le long de la courbe D, il existe une surface F ayant D comme courbe double.

6. Les surfaces adjointes d'ordre $n-4$ à la surface F passent simplement par la courbe D. Ce sont donc les surfaces Ψ passant éventuellement par la courbe D et les surfaces d'ordre $n-8$ jointes à la surface Φ.

Les surfaces Ψ contenant la courbe D forment un système de dimension

$$\frac{1}{2}n^2 - 8n + 33 - \frac{\tau}{4}.$$

D'autre part, les surfaces d'ordre $n-8$ linéairement indépendantes sont au nombre de $\binom{n-5}{3}$. Le genre géométrique de la surface F vaut donc

$$p_g = \frac{1}{6}(n^3 - 15n^2 + 59n - 6) - \frac{\tau}{4}.$$

7. Pour construire la surface F', nous utiliserons les surfaces du quatrième ordre qui représentent les involutions n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface dont la courbe canonique est d'ordre zéro, c'est-à-dire à une surface de Jacobi ou à une surface de genres un. En d'autres termes, nous supposerons que la surface Φ est une surface de Kummer ou l'enveloppe d'une série simplement infinie, d'indice deux, de quadriques ayant huit points-base distincts.

Sur de telles surfaces, on connaît des systèmes de courbes passant par τ points doubles coniques et le long de chacune desquelles il y a une surface inscrite dans la surface. D'une manière précise, on a des courbes D_1 satisfaisant à l'équation fonctionnelle

$$n\Gamma \equiv 2D_1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_\tau,$$

pour des valeurs convenables de n et de τ. Les courbes D_1 rencontrent en un point chacune des courbes $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_\tau$.

Le système $|D_1|$ a le degré $n^2 - \frac{\tau}{2}$, le genre et la dimension $\frac{n^2}{2} - \frac{\tau}{4} + 1$. Supposons que cette dimension soit au moins égale à 2τ; il existe alors des courbes D_1 passant par deux points fixes de chacune des courbes $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_\tau$ et contenant par conséquent ces courbes. En d'autres termes, il existe des courbes

$$D \equiv D_1 - \gamma_1 - \gamma_2 - \dots - \gamma_\tau;$$

ces courbes rencontrent en trois points chacune des courbes $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_\tau$. On a

$$n\Gamma \equiv 2D + 3(\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_\tau).$$

Il existe, d'autre part, une surface d'ordre n inscrite dans Φ le long de toute courbe D et cette surface a des points triples en $P_1, P_2, \ldots, P_\tau$. Une telle surface sera une surface F'.

8. Supposons que Φ soit une surface de Kummer. Elle possède 16 points doubles et nous prendrons $\tau = 16$. G. Humbert, dans son mémoire cité plus haut, a démontré qu'il existe sur Φ des courbes d'ordre $4m$, de genre $2m^2 - 3$, pour $m > 1$. Le long de chacune de ces courbes il y a une surface d'ordre $2m$ inscrite dans la surface Φ. Ces courbes seront les courbes D_1 et l'on aura $n = 2m$:

$$2m\Gamma \equiv 2D_1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_{16}.$$

Pour qu'il existe des courbes D, on doit avoir

$$2m^2 - 3 \geq 32,$$

c'est-à-dire $m \geqslant 5$. On en conclut que :

Pour $m \geqslant 5$, *il existe des surfaces d'ordre* $2m$, *ayant une courbe double* $4m$ *et 16 points triples pour la courbe et pour la surface, la courbe double étant tracée sur une surface de Kummer. Le genre géométrique de ces surfaces est*

$$p_g = \frac{1}{3} m(4m^2 - 30m + 59) - 5.$$

Pour $m = 5$, on a une surface de genre $p_g = 11$. Les adjointes d'ordre six à la surface F forment un système déterminé par une surface irréductible et par les quadriques de l'espace jointes à la surface Φ.

9. Supposons encore que Φ soit une surface de Kummer. G. Humbert a établi l'existence des courbes d'ordre $4m+2$ et de genre $2m^2+2m-1$, passant par dix points doubles de la surface. Le long de chacune de ces courbes il existe une surface d'ordre $n = 2m+1$ inscrite dans la surface. Nous prendrons $\tau = 10$ et les courbes D_1 seront les courbes précédentes. Pour que les courbes D existent, nous devons avoir

$$2m^2 + 2m - 1 \geq 20,$$

c'est-à-dire $m \geqslant 3$. Nous avons supposé $n > 8$, donc nous supposons $m \geqslant 4$.

Pour $m \geqslant 4$, *il existe des surfaces d'ordre* $2m+1$, *ayant une courbe double d'ordre* $4m+2$ *et dix points triples pour la* *courbe et pour la surface, la courbe étant tracée sur une surface de Kummer. Ces surfaces ont le genre géométrique*

$$p_g = \frac{4}{3}(m^3 - 6m^2 + 8m + 3).$$

Pour $m=4$, on a $p_g=4$ et la surface F a pour courbes canoniques ses sections planes.

10. La surface Φ étant toujours une surface de Kummer, G. Humbert a démontré qu'il existe des courbes d'ordre $4m+2$ et de genre $2m^2+2m$ passant par six points doubles, le long de chacune desquelles il y a une surface d'ordre $2m+1$ inscrite dans la surface Φ. Posons donc $\tau=6$ et $n=2m+1$. Nous devons avoir

$$2m^2 + 2m \geq 12,$$

c'est-à-dire $m \geqslant 2$. L'hypothèse $n > 8$ entraîne $m \geqslant 4$. Par conséquent

Pour $m \geqslant 4$, *il existe des surfaces d'ordre* $2m+1$, *ayant une courbe double d'ordre* $4m+2$ *et six points triples à la fois pour la courbe et pour la surface, la courbe étant tracée sur une surface de Kummer. Ces surfaces ont le genre géométrique*

$$p_g = \frac{1}{3}(4m^3 - 24m^2 + 32m + 15).$$

Pour $m=4$, on a une surface du neuvième ordre ayant une courbe double d'ordre 18 et de genre 28, possédant six points triples pour la courbe et la surface, de genre géométrique $p_g=5$. Il existe donc une surface du cinquième ordre irréductible passant par la courbe double.

11. Supposons maintenant que la surface Φ soit l'enveloppe d'un système de quadriques d'indice deux, ayant huit points-base distincts, formant un groupe de Lamé. Ces points sont doubles pour la surface Φ et nous prendrons $\tau=8$. La surface Φ représente une involution du second ordre, ayant huit points unis, appartenant à une surface de genres un ($p_a=P_4=1$), d'ordre huit, de S_5. Il existe sur la surface Φ des courbes d'ordre $4m$ et de genre $2m^2-1$, passant par les huit points doubles; le long de chacune de ces courbes il y a une surface d'ordre $2m$ inscrite dans la surface Φ. Nous devons avoir

$$2m^2 - 1 \geq 16,$$

d'où $m \geqslant 3$. Pour l'hypothèse $n > 8$, on a $m > 4$; donc

Pour m >4, *il existe des surfaces d'ordre* 2m, *ayant une courbe double d'ordre* 4m *et huit points triples à la fois pour la courbe et pour la surface, la courbe étant tracée sur une surface du quatrième ordre ayant huit points doubles formant un groupe de Lamé. Le genre géométrique de la surface est*

$$p_g = \frac{1}{3} m (4 m^2 - 30 m + 59) - 3.$$

On peut remarquer que pour $m=4$, on a $p_g=1$; donc la surface d'ordre huit, possédant une courbe double d'ordre 16 et huit points triples pour la courbe et pour la surface, possède une courbe canonique d'ordre zéro et est de genres un ($p_a = P_4 = 1$), car les raisonnements faits plus haut sont applicables à ce cas. La courbe double est de genre cinq.

12. Il nous reste à examiner le cas $n=9$, $\tau=14$, que nous avons laissé de côté (n° 5). Si ce cas existe, nous avons, sur la surface Φ,

$$9\Gamma \equiv 2\,D + 3(\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_{14})$$

et il existe des courbes

$$D_1 \equiv D + \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_{14}$$

telles que

$$9\,\Gamma \equiv 2\,D_1 + \gamma_1 + \dots + \gamma_{14}.$$

Les courbes D_1 sont de genre 33 et forment un système $|D_1|$ de dimension 33. Les courbes D_1 découpent sur une courbe Γ une série g_{18}^{15}; par conséquent il existe des courbes D_1 contenant une courbe Γ comme partie. Posons $D_2 \equiv D_1 - \Gamma$. On a

$$7\,\Gamma \equiv 2\,D_2 + \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_{14}.$$

Le système $|D_2|$ a la dimension et le genre égaux à 22. Les courbes D_2 découpent sur une courbe Γ une série g_{14}^{11}; par conséquent, il existe des courbes D_2 contenant une courbe Γ. En posant $D_3 \equiv D_2 - \Gamma$, on a

$$5\,\Gamma \equiv 2\,D_3 + \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_{14}.$$

Le système $|D_3|$ est de genre et de dimension 10; ses courbes découpent sur une courbe Γ une série linéaire g_{10}^{7}; par conséquent il existe des courbes D_3 contenant une courbe Γ. Posons $D_4 \equiv D_3 - \Gamma$; on a

$$3\,\Gamma \equiv 2\,D_4 + \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_{14}.$$

Ls courbes D_4, d'ordre six, sont de genre deux et forment un réseau $|D_4|$. Le long de chacune des courbes D_4 il existe une surface cubique inscrite dans Φ. La développable lieu des plans tangents à la surface Φ aux points d'une courbe D_4 est de classe quatre. Mais alors, la surface cubique inscrite dans Φ le long de cette courbe doit posséder 8 points doubles, ce qui est impossible. Le cas $n=9$, $\tau=14$ ne peut donc se présenter.

Liége, le 12 février 1946.

M. HAYEZ, Imprimeur de l'Académie royale de Belgique, rue de Louvain, 112, Bruxelles.
(Domicile légal : rue de la Chancellerie, 4)