EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liège*.
(Séance du 18 octobre 1945. — N° 10.)

Quelques remarques sur les surfaces de genres un et de rang deux,

par LUCIEN GODEAUX, Membre de la Société.

(*Troisième note.*)

Nous considérons, dans cette troisième note [1], les surfaces de genres un et de rang deux appartenant à un espace linéaire à six dimensions. Nous établissons leur existence en les construisant.

1. Soit F une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$) et de rang deux, normale, de l'espace S_6 à six dimensions. Elle est d'ordre 10 et ses sections hyperplanes C ont le genre 6. De plus, elle possède huit points doubles coniques $O_1, O_2, \ldots, O_8$ et parmi les hyperquadriques passant par ces huit points doubles, il en est qui touchent la surface en chaque point de rencontre. Les courbes de contact Γ sont d'ordre 10 et de genre 4; elles forment un système linéaire $|\Gamma|$ de degré 6 et de dimension 4.

Nous désignerons par $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_8$ les courbes rationnelles de degré —2 équivalentes aux huit points doubles coniques. On a alors

$$2C \equiv 2\Gamma + \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_8.$$

Projetons la surface F des points O_1, O_2, O_3 (certainement non en ligne droite) sur un espace S_3. Nous obtenons une surface F′ du quatrième ordre sur laquelle les courbes $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sont des coniques ne se rencontrant pas deux à deux et dont les plans $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ne passent pas par une même droite.

Les sections planes de F′ sont les courbes

$$C' \equiv C - \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3.$$

Les plans $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ coupent encore F′, en dehors de $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, suivant des coniques $\gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3$. On a donc

$$\gamma'_1 \equiv C' - \gamma_1, \quad \gamma'_2 \equiv C' - \gamma_2, \quad \gamma'_3 \equiv C' - \gamma_3.$$

La conique γ'_1 coupe chacune des coniques γ_2, γ_3 en deux points; γ'_2 coupe en deux points chacune des coniques γ_3, γ_1; enfin γ'_3 coupe en deux points chacune des coniques γ_1, γ_2.

---

[1] Les deux premières notes ont paru dans le *Bulletin de la Société des Sciences de Liège*, 1945, pp. 282-296, 332-341.

Aux points doubles O_4, O_5, ..., O_8 de F correspondent des points doubles coniques O'_4, O'_5, ..., O'_8 de F′.

2. Sur F′ les courbes C sont du dixième ordre et sont découpées par les surfaces du quatrième ordre passant par les coniques γ'_1, γ'_2, γ'_3, car on a

$$4C' - \gamma'_1 - \gamma'_2 - \gamma'_3 \equiv C.$$

Les surfaces du quatrième ordre sont en nombre ∞^{34}; celles qui passent par les coniques γ'_1, γ'_2, γ'_3, qui ne se rencontrent pas deux à deux, sont en nombre ∞^7. Parmi ces surfaces se trouve la surface F′. Cette surface ne passe pas par le point S commun aux plans σ_1, σ_2, σ_3 et, par conséquent, les ∞^6 surfaces du quatrième ordre passant par γ'_1, γ'_2, γ'_3 et par S découpent sur F′ les courbes C. Nous désignerons ces surfaces par φ_4.

Observons que la droite $s_1 = \sigma_2\sigma_3$ coupe une surface φ_4 en S et aux points d'appui, distincts, de γ'_2, γ'_3 sur cette droite, c'est-à-dire en cinq points distincts. La droite s_1 et de même les droites $s_2 = \sigma_3\sigma_1$, $s_3 = \sigma_1\sigma_2$ appartiennent donc aux surfaces φ_4.

D'ailleurs, les courbes C ne peuvent rencontrer les courbes γ_1, γ_2, γ_3 en des points variables.

Les courbes 2C sont découpées sur F′ par les surfaces du huitième ordre φ_8 passant deux fois par chacune des coniques γ'_1, γ'_2, γ'_3 et par chacune des droites s_1, s_2, s_3. Il existe une de ces surfaces inscrite à F′ le long d'une courbe Γ. Or, les courbes Γ rencontrent en un point chacune des coniques γ_1, γ_2, γ_3; par conséquent, la surface φ_8 touchant F′ le long d'une courbe Γ doit rencontrer le plan σ_1, par exemple, en un point en dehors de la conique double γ'_1 et des droites doubles s_2, s_3; elle contient donc ce plan comme partie. Elle contient de même les plans σ_2, σ_3 comme parties. On en conclut que le long d'une courbe Γ il existe une surface du cinquième ordre φ_5 inscrite à la surface F′ et passant par les coniques γ'_1, γ'_2, γ'_3. On a donc

$$5C' - \gamma'_1 - \gamma'_2 - \gamma'_3 \equiv 2\Gamma + \gamma_4 + \gamma_5 + \dots + \gamma_8. \qquad (1)$$

Observons que le point S est double pour les surfaces φ_4, donc quadruple pour les surfaces φ_8 et par conséquent simple pour les surfaces φ_5.

3. Une courbe Γ, d'ordre sept, coupe γ_1 en un point et par conséquent γ'_1 en six points. Le système $|\Gamma|$ a la dimension 4; il existe donc ∞^2 courbes Γ passant par deux points de la conique γ_1 et comprenant donc cette conique comme partie. Elles sont complétées par des courbes $\Gamma-\gamma_1$, du cinquième ordre et de genre deux, s'appuyant en trois points sur γ_1 et en deux points sur γ'_1. Il existe par conséquent une surface φ_5 passant par γ'_1, γ'_2, γ'_3 et touchant F' le long de la conique γ_1 et de la quintique $\Gamma-\gamma_1$.

De la relation (1) on déduit

$$4C'-\gamma_1-\gamma'_2-\gamma'_3\equiv 2(\Gamma-\gamma_1)+\gamma_4+\gamma_5+\dots+\gamma_8. \qquad (2)$$

Par conséquent, il existe une surface du quatrième ordre passant par les coniques γ_1, γ'_2, γ'_3, inscrite à la surface F' le long de chaque quintique $\Gamma-\gamma_1$.

Les quintiques $\Gamma-\gamma_1$ sont en nombre ∞^2 et coupent γ_2 en un point; il existe une de ces courbes passant par deux points de γ_2 et contenant par conséquent cette courbe comme partie. Elle est complétée par une cubique gauche K s'appuyant en trois points sur les coniques γ_1, γ_2, en un point sur γ_3, en deux points sur γ'_3, mais ne rencontrant pas γ'_1, γ'_2. Il existe une surface du quatrième ordre passant par γ_1, γ'_2, γ'_3, touchant F' le long de γ_2 et de K.

De la relation (2) on déduit

$$3C'-\gamma_1-\gamma_2-\gamma'_3\equiv 2K+\gamma_4+\gamma_5+\dots+\gamma_8.$$

Par suite, il existe une surface cubique φ_3 passant par les coniques γ_1, γ_2, γ'_3, inscrite à la surface F' le long de la cubique gauche K.

Observons que la droite s_3 coupe φ_3 aux points de rencontre de cette droite avec γ_1, γ_2, qui sont distincts. La droite s_3 appartient donc à φ_3.

4. La surface F' possède cinq points doubles coniques O'_4, O'_5 ..., O'_8 sur la cubique gauche K. La première polaire d'un point quelconque P par rapport à F' passe par ces points et coupe encore K en quatre points. Par conséquent, les plans tangents à F' et à φ_3 aux points de K engendrent une développable de classe quatre.

La première polaire du point P par rapport à φ_3 coupe K en six points; quatre de ceux-ci sont les points de contact des plans tangents à F' et à φ_3 passant par P. En chacun des deux autres, le plan tangent à φ_3 doit être indéterminé et φ_3 possède donc deux points doubles sur K.

Représentons point par point la surface φ_3 sur un plan σ de telle sorte qu'aux sections planes de la surface correspondent les cubiques δ_3 passant par six points. On peut s'arranger de manière qu'aux points doubles de φ_3 correspondent dans σ deux droites a_1, a_2, les points-base du système $|\delta_3|$ étant :

Le point A_0 commun aux droites a_1, a_2;

Deux points A_{11}, A_{12} situés sur a_1;

Deux points A_{21}, A_{22} situés sur a_2;

Un point A, sans relation avec les précédents, qui correspond à la droite s_3.

Aux coniques γ_1, γ_2 correspondent deux cubiques δ'_3, δ''_3 de $|\delta_3|$, ayant toutes deux un point double en A.

A la conique γ'_3 correspond une conique δ_2 passant par A_{11}, A_{21}, A_{21}, A_{22}, mais non par A.

A la section de φ_3 par une surface du quatrième ordre correspond dans σ une courbe ψ d'ordre 12, ayant des points quadruples en A_0, A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, A. Si cette surface du quatrième ordre est la surface F', la courbe ψ comprend les droites a_1, a_2; les cubiques δ'_3, δ''_3; la conique δ_2. Il reste une conique ne passant pas par les points-base de $|\delta_3|$ et qui, puisque F' touche φ_3 le long de K, doit se réduire à une droite k comptée deux fois.

5. Partons de la surface φ_3. Les surfaces du quatrième ordre passant par la cubique gauche K coupent encore φ_3 suivant une courbe qui est représentée dans le plan σ par une courbe d'ordre 9, passant deux fois par A_0, trois fois par chacun des points A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22} et quatre fois par A.

Pour que cette courbe d'ordre 9 contienne la droite k de σ qui correspond à la cubique gauche K, il faut qu'elle passe par dix points de cette droite; donc, pour qu'une surface du quatrième ordre passant par K touche φ_3 le long de cette courbe, il faut dix conditions.

Les surfaces du quatrième ordre passant par K sont en nombre ∞^{21}; parmi ces surfaces il y en a ∞^3 formées de φ_3 et d'un plan; donc, il y a ∞^{17} surfaces du quatrième ordre passant par K et ne contenant pas φ_3 comme partie.

Il y a ∞^7 surfaces du quatrième ordre ne contenant pas φ_3 comme partie et inscrites le long de K à cette surface.

On peut d'ailleurs avoir une confirmation de ce résultat en observant que les plans tangents à φ_3 le long de K engendrent une développable de classe quatre. Il suffit d'exprimer qu'une surface du quatrième ordre passant par K touche φ_3 en cinq points de K, ce qui fait bien dix conditions.

Il existe une surface du quatrième ordre inscrite à φ_3 le long de K ne contenant pas φ_3 comme partie, passant pas trois points de γ_1, par trois points de γ_2 et par un point de γ'_3; cette surface contient en conséquence ces trois courbes et est d'ailleurs irréductible. De plus, cette surface ne peut avoir la courbe K comme courbe double, car elle serait alors formée de cordes de K et ne pourrait contenir à la fois les trois coniques γ_1, γ_2, γ'_3. Enfin, en reprenant le raisonnement fait plus haut, en sens inverse, on voit que la surface obtenue a nécessairement cinq points doubles coniques sur K. L'existence de la surface F′ et, par suite, celle de la surface F sont donc établies.

Observons, en passant, que le système des courbes d'ordre 9 passant deux fois par A_0, trois fois par A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22} et quatre fois par A a la dimension 17.

Liége, le 9 août 1945.

M. HAYEZ, Imprimeur de l'Académie royale de Belgique, rue de Louvain, 112, Bruxelles.
(Domicile légal : rue de la Chancellerie, 4)