Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences).
Séance du 2 février 1946.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur les surfaces de genres un et de rang trois de l'espace à quatre dimensions,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Appelons brièvement surface de rang trois une surface image d'une involution d'ordre trois appartenant à une surface algébrique. Dans des travaux antérieurs [1], nous avons considéré les surfaces de rang trois et de genres un ($p_a = P_4 = 1$). Dans cette note, nous considérons celles de ces surfaces qui sont normales et appartiennent à un espace linéaire à quatre dimensions.

De nos recherches antérieures résulte le théorème suivant :

Si une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$), *d'ordre six, à sections hyperplanes de genre quatre, appartenant à un espace linéaire à quatre dimensions, est de rang trois :*

1) *elle possède six points doubles biplanaires ordinaires ;*

2) *elle contient deux réseaux de courbes d'ordre six et de genres deux ; le long de chacune de ces courbes, il y a une hypersurface cubique passant par les six points doubles et osculant la surface.*

Les deux réseaux de courbes de genres deux tracés

[1] *Mémoire sur les involutions appartenant à une surface de genres un* (Annales de l'École Normale Supérieure, 1914, pp. 357-430 ; 1919, pp. 51-70). Voir aussi notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Paris, Hermann, 1935).

sur la surface sont de degré deux et déterminent donc deux involutions du second ordre. Ces deux involutions peuvent-elles être distinctes ? A cette question, nous répondons par l'affirmative en construisant une surface sur laquelle les deux involutions sont effectivement distinctes.

Une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$), *d'ordre six, et de rang trois appartenant à un espace linéaire à quatre dimensions, contient deux involutions du second ordre qui sont en général distinctes. Les six points doubles biplanaires de la surface ne peuvent alors appartenir à un même hyperplan. Si les six points de diramation appartiennent à un même hyperplan, les deux involutions sont confondues et inversement. Dans ce cas, la surface est birationnellement équivalente à un plan double dont la courbe de diramation, du sixième ordre, possède trois tacnodes. La surface est l'intersection d'une hyperquadrique et du cône projetant d'un point une surface cubique possédant trois points doubles biplanaires.*

1. Soit F une surface d'ordre six, normale, de genres un ($p_a = P_4 = 1$), de S_4, image d'une involution cyclique d'ordre trois appartenant à une surface de genres un. Les sections hyperplanes C de F sont de genre quatre et la surface possède les propriétés suivantes :

1) Elle possède six points doubles biplanaires ordinaires $A_1, A_2 \ldots, A_6$. Chacun de ces points est équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à l'ensemble de deux courbes rationnelles de degré —2, se coupant en un point. Nous désignerons par a_{i1}, a_{i2} les courbes équivalentes au point A_i.

2) Elle contient deux réseaux $|C_1|$, $|C_2|$ de courbes de genre deux et d'ordre six. Le long de chacune de ces courbes, il existe une hypersurface cubique osculant la surface F. En un point de diramation, c'est-à-dire en un des points doubles $A_1, A_2, \ldots, A_6$, les courbes C_1

rencontrent une des composantes, les courbes C_2 l'autre composante.

La seconde propriété se traduit par les relations fonctionnelles

$$\begin{aligned} 3C &\equiv 3C_1 + 2(a_{11} + a_{21} + \ldots + a_{61}) \\ &\quad + (a_{12} + a_{22} + \ldots + a_{62}), \\ 3C &\equiv 3C_2 + (a_{11} + a_{21} + \ldots + a_{61}) \\ &\quad + 2(a_{12} + a_{22} + \ldots + a_{62}). \end{aligned}$$

Les courbes C_1 rencontrent en un point chacune des courbes $a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{61}$ et les courbes C_2 rencontrent en un point chacune des six autres courbes.

Le réseau $|C_1|$ est de degré deux et détermine donc une involution d'ordre deux ; nous désignerons par T_1 la transformation birationnelle de F en soi génératrice de cette involution. De même, nous disignerons par T_2 la transformation birationnelle de F génératrice de l'involution du second ordre déterminée par le réseau $|C_2|$.

Une courbe C_1 et une courbe C_2 se rencontrent en quatre points variables.

2. Les transformations T_1, T_2 peuvent coïncider. Un exemple en est fourni par la surface F ayant pour équations

$$\begin{aligned} &x_1 x_2 x_3 = x_4^3, \\ &x_0^2 \phi_0 + x_0 \phi_1(x_1, x_2, x_3, x_4) + \phi_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0. \end{aligned}$$

Les six points doubles se répartissent par couples sur les droites $x_2 = x_3 = x_4 = 0$, $x_3 = x_1 = x_4 = 0$, $x_1 = x_2 = x_4 = 0$.

Les courbes C_1, C_2 sont les courbes de contact de F et respectivement des hypersurfaces cubiques

$$\begin{aligned} &\lambda_1^3 x_1^2 x_2 + \lambda_2^3 x_2^2 x_3 + \lambda_3^3 x_3^2 x_1 \\ &\quad + 3x_4(\lambda_1^2 \lambda_2 x_1 x_2 + \lambda_2^2 \lambda_3 x_2 x_3 + \lambda_3^2 \lambda_1 x_3 x_1) \\ &\quad + 3x_4^2(\lambda_1^2 \lambda_3 x_1 + \lambda_2^2 \lambda_1 x_3 + \lambda_3^2 \lambda_2 x_3) + 6\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 x_4^3 = 0, \end{aligned}$$

$$\lambda_1^3 x_1^2 x_3 + \lambda_2^3 x_2^2 x_1 + \lambda_3^3 x_3^2 x_2 + 3x_4 (\lambda_1^2 \lambda_3 x_1 x_3 + \lambda_2^2 \lambda_1 x_2 x_1 + \lambda_3^2 \lambda_2 x_3 x_2) + 3x_4^2 (\lambda_1^2 \lambda_2 x_1 + \lambda_2^2 \lambda_3 x_2 + \lambda_3^2 \lambda_1 x_3) + 6\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 x_4^3 = 0.$$

Nous supposerons, dans ce qui va suivre, que les transformations T_1, T_2 sont distinctes.

3. Nous supposerons en premier lieu que les six points A_1, $A_2, \dots, A_6$ n'appartiennent pas à un même hyperplan. Projetons alors la surface F du point A_1 sur un espace à trois dimensions (hyperplan) ne passant pas par A_1. Nous obtenons une surface du quatrième ordre, que nous désignerons par F′, sur laquelle les courbes a_{11}, a_{12} sont des droites coplanaires. Le plan de ces droites coupe encore F′ suivant une conique que nous désignerons par γ.

Aux points A_2, $A_3, \dots, A_6$ correspondent sur F′ des points doubles biplanaires ordinaires que nous désignerons par A'_2, A'_3, …, A'_6. Aux sextiques C_1, C_2 correspondent des quintiques que nous désignerons par le même symbole. On voit immédiatement que les quintiques C_1, C_2 s'appuient en quatre points sur la conique γ. Celle-ci est d'ailleurs la projection de la section de F par l'hyperplan qui contient les plans tangents à F au point A_1.

Les sections planes de la surface F′ sont les courbes $C' \equiv C - a_{11} - a_{12}$. On a donc

$$3C' + a_{11} + 2a_{12} \equiv 3C_1 + 2\alpha_1 + \alpha_2.$$

en posant

$$\alpha_1 \equiv a_{21} + a_{31} + \dots + a_{61}, \quad \alpha_2 \equiv a_{22} + a_{32} + \dots + a_{62}.$$

On a d'autre part

$$C \equiv C' + a_{11} + a_{12}$$

et par conséquent

$$5C' - a_{11} - 2\gamma \equiv 3C_1 + 2\alpha_1 + \alpha_2.$$

Par conséquent, il existe une surface du cinquième ordre ayant la conique double γ, passant simplement par la droite a_{11}, osculant F' le long de chaque courbe C_1.

Appelons C_1^* les courbes C_1 passant par un point de la droite a_{12} et qui, par suite, contiennent cette droite. On a

$$3C' + a_{11} - a_{12} \equiv 3C_1^* + 2\alpha_1 + \alpha_2,$$

d'où

$$4C' - 2a_{12} - \gamma \equiv 3C_1^* + 2\alpha_1 + \alpha_2.$$

Les courbes C_1^* sont des quartiques elliptiques, formant un faisceau et le long de chacune de ces courbes, il y a une surface du quatrième ordre, passant par la conique γ et deux fois par la droite a_{12}, osculant la surface F'. Les courbes C_1^* ne rencontrent pas la droite a_{11}.

Désignons par C_1^{**} la courbe C_1^* passant par un point de la droite a_{11} et contenant par conséquent cette droite. La courbe C_1^{**} est une cubique gauche satisfaisant à la relation fonctionnelle

$$3C' - 2a_{11} - a_{12} \equiv 3C_1^{**} + 2\alpha_1 + \alpha_2.$$

Il existe donc une surface cubique osculant F' le long de la cubique gauche C_1^{**}, touchant F' le long de a_{11} et passant par a_{12}. La cubique gauche C_1^{**} rencontre la droite a_{11} en deux points et la droite a_{12} en un point ; elle ne rencontre donc pas la conique γ et par conséquent la surface cubique dont il vient d'être question ne peut rencontrer le plan de γ en dehors des droites a_{11}, a_{12} ; cette surface a donc la droite a_{11} comme droite double.

4. Désignons de même par C_2^* les courbes C_2 passant par un point de a_{11} et par C_2^{**} la courbe C_2^* passant par un point de a_{12}. On a donc

$$C_2^* \equiv C_2 - a_{11}, \qquad C_2^{**} \equiv C_2 - a_{11} - a_{12}.$$

On obtient comme tantôt les relations fonctionnelles

$$4C' - 2a_{11} - \gamma \equiv 3C_2^* + \alpha_1 + 2\alpha_2,$$
$$3C' - a_{11} - 2a_{12} \equiv 3C_2^{**} + \alpha_1 + 2\alpha_2.$$

Il existe donc une surface cubique réglée ayant a_{12} comme droite double, passant par a_{11} et osculant F′ le long de la cubique gauche C_2^{**}.

Des relations établies plus haut, on déduit

$$6C' \equiv 3C_2 + 3C_1^{**} + 3\alpha_1 + 3\alpha_2$$

et par conséquent, puisque la division sur une surface de genres un est une opération univoque, le diviseur de Severi σ étant égal à l'unité, on a

$$2C' \equiv C_2 + C_1^{**} + \alpha_1 + \alpha_2.$$

Une quintique de genre deux C_2 est située sur une quadrique et celle-ci coupe encore F′ suivant une cubique gauche. La relation précédente montre que cette cubique gauche est précisément C_1^{**}. Donc les quadriques passant par C_1^{**} découpent sur F′ les courbes du réseau $|C_2|$.

On a de même

$$2C' \equiv C_1 + C_2^{**} + \alpha_1 + \alpha_2$$

et les quadriques passant par la cubique gauche C_2^{**} découpent sur F′ les courbes C_1.

Pour simplifier les notations, nous représenterons C_1^{**} par K_1 et C_2^{**} par K_2.

On a encore

$$6C' - 3a_{11} - 3a_{12} \equiv 3C_1^{**} + 3C_2^{**} + 3\alpha_1 + 3\alpha_2.$$

c'est-à-dire

$$2C' \equiv K_1 + K_2 + a_{11} + a_{12} + \alpha_1 + \alpha_2,$$

ce qui signifie qu'il existe une quadrique Q coupant F′ suivant les cubiques gauches K_1, K_2 et les droites a_{11}, a_{12}. C'est d'ailleurs une conséquence immédiate de ce qui précède, puisque $K_2 + a_{11} + a_{12}$ par exemple, est une courbe C_2 et par conséquent se trouve sur une quadrique passant par K_1.

5. Puisque les quadriques passant par K_2 découpent

sur F' les quintiques C_1, l'involution du second ordre déterminée par le réseau $|C_1|$ n'est autre que l'involution découpée sur F' par les bisécantes de la cubique gauche K_2. On a donc ainsi une génération simple de la transformation T_1. De même, les cordes de la cubique gauche K_1 déterminent sur F' les courbes de points homologues dans la transformation T_2.

Comme nous l'avons dit, K_1 coupe a_{11} en deux points et a_{12} en un point. De même, K_2 coupe a_{11} en un point et a_{12} en deux points. On en conclut que :

La transformation T_1 transforme la droite a_{12} en elle-même et transforme K_1 dans la droite a_{11}, puisque les bisécantes de K_2 appartiennent à la quadrique Q rencontrent a_{11} et K_1 chacune en un point.

La transformation T_2 transforme la droite a_{11} en elle-même et échange K_2 et a_{12}.

Au point A'_2 par exemple, la surface F' a deux plans tangents que nous désignerons par α'_1, α'_2 ; l'un, α'_1, contient la courbe infiniment petite a_{21}, l'autre la courbe infiniment petite a_{22}. La courbe K_2, qui est partie d'une courbe C_2, passe par A'_2 et est tracée sur la nappe de la surface F' tangente à α_2. Le cône projetant K_2 de A'_2 coupe F' suivant une courbe C_1 particulière, ayant un point triple en A'_2, deux tangentes en ce point appartenant à α'_1, l'autre à α'_2. D'après ce qui vient d'être établi, la courbe C_1 envisagée est la transformée par T_1 de la courbe infiniment petite a_{21}, tandis que la courbe a_{22} est unie pour la même transformation.

De même, le cône projetant K_1 de A'_2 coupe F' suivant une courbe C_2 particulière, ayant un point triple en A'_2, deux tangentes en ce point appartenant au plan α'_2 et la troisième tangente au plan α'_1.

On obtient des résultats analogues pour les points A'_3, A'_4, A'_5 et A'_6.

6. Désignons par Φ_1 la surface cubique osculant F'

le long de la courbe K_1, passant doublement par la droite a_{11} et simplement par la droite a_{12}. Représentons cette surface sur un plan ϖ. On sait que cette représentation plane peut être obtenue de manière qu'aux sections planes de Φ_1 correspondent les coniques passant par un point P et découpant, sur une droite p ne passant pas par P, une involution déterminée I_2 d'ordre deux. La droite p correspond à la droite double a_{11}.

A la section de Φ_1 par une surface du quatrième ordre correspond dans ϖ une courbe du huitième ordre ayant un point quadruple en P. Si cette surface est la surface F', cette courbe du huitième ordre doit se composer de la droite p, d'une droite r passant par P, homologue de la génératrice a_{12} de Φ_1 et d'une courbe homologue de K_1, comptée trois fois. On sait qu'aux coniques passant par O et ne coupant pas p suivant deux points formant un couple de l'involution I_2 correspondent des cubique gauches sur Φ_1. Une telle conique E, comptée trois fois forme, avec p et r, la courbe du huitième ordre dont il vient d'être question.

Prenons comme triangle de référence dans le plan ϖ un triangle dont le côté $x_3 = 0$ coïncide avec la droite p, le sommet opposé coïncidant avec P. Soit d'autre part $x_1 x_2' + x_1' x_2 = 0$ l'équation de l'involution I_2 sur la droite p ou $x_3 = 0$. Les sections planes de Φ_1 sont représentées par le système de coniques

$$\lambda_1 x_1 x_3 + \lambda_2 x_2 x_3 + \lambda_3 x_1^2 + \lambda_1 x_2^2 = 0.$$

Posons

$$X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = x_1 x_3 : x_2 x_3 : x_1^2 : x_2^2 \qquad (1)$$

L'équation de la réglée Φ_1 est

$$X_1^2 X_4 - X_2^2 X_3 = 0.$$

Soit d'autre part

$$a_0 x_1 x_2 + a_1 x_1 x_3 + a_2 x_2 x_3 + a_3 x_1^2 + a_4 x_2^2 = 0$$

l'équation de la conique E. La courbe du huitième ordre représentant dans ϖ la courbe intersection de la surface F′ avec Φ_1 est

$$x_2 x_3 (a_0 x_1 x_2 + a_1 x_1 x_3 + a_2 x_2 x_3 + a_3 x_1^2 + a_4 x_2^2)^3 = 0.$$

En utilisant les équations (1), on trouve que la surface F′ a pour équation

$$X_2 \phi^3 + 3a_0 \phi^2 X_1 X_4 + 3a_0^2 \phi X_2 X_3 X_4 + a_0^3 X_1 X_3 X_4^2 = 0,$$

où l'on a posé

$$\phi \equiv a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4.$$

On voit que cette surface est irréductible. La droite a_{11} a comme équations $X_1 = X_2 = 0$ et la droite a_{12}, $X_2 = X_4 = 0$.

L'existence de la surface Φ_1 entraîne celle de la surface Φ_2, dont on pourrait d'ailleurs, par des calculs un peu longs mais ne présentant pas de difficulté, trouver l'équation. L'existence de la surface Φ_1 entraîne en effet

$$3C' - 2a_{11} - a_{12} \equiv 3K_1 + 2\alpha_1 + \alpha_2.$$

D'autre part, la quadrique passant par K_1, a_{11}, a_{12}, donne

$$2C' \equiv a_{11} + a_{12} + K_1 + K_2 + \alpha_1 + \alpha_2,$$

d'où l'on tire

$$3C' - a_{11} - 2a_{12} \equiv 3K_2 + \alpha_1 + 2\alpha_2.$$

Cette relation implique l'existence de la surface Φ_2.

7. Nous aurons prouvé l'existence de la surface F′ lorsque nous aurons démontré que cette surface possède cinq points doubles biplanaires sur la courbe K_1.

Considérons un point quelconque de l'espace. La quadrique polaire de M par rapport à Φ_1 passe par la droite double a_{11}, bisécante de K_1, et coupe encore cette courbe en quatre points. Les plans tangents à Φ_1 en ces points passent par M et par conséquent la développable circonscrite à Φ_1 le long de K_1 est de classe quatre.

La surface cubique polaire de M par rapport à F′ coupe K en neuf points. En quatre de ces points, les plans tangents à Φ_1 donc à F′ passant par M. En chacun des cinq autres points, il ne peut en être de même et le plan tangent à F′ doit y être indéterminé. En d'autres termes, ces points doivent être doubles pour la surface F′. Soit L un de ces points ; le plan tangent en L à Φ_1 est bien déterminé. Une courbe tracée sur F′ et passant par L doit couper Φ_1 en trois points confondus avec L, par conséquent le plan tangent à Φ_1 en L est tangent à F′ et le point L est double biplanaire pour la surface F′ (1).

On en conclut que F′ possède cinq points doubles biplanaires sur la courbe K_1.

Cela étant, rapportons projectivement aux hyperplans d'un espace S_4 les quadriques passant par la conique γ, dont les équations sont

$$X_2 = 0, \qquad 3\phi^2 + a_0^2 X_3 X_4 = 0.$$

On obtient comme transformée de F′ la surface F d'équations

$$X_0 X_2 = 3\phi^2 + a_0^2 X_3 X_4 = 0,$$
$$\phi^3 + 3a_0^2 \phi X_3 X_4 + a_0 X_0 X_1 X_4 = 0.$$

Cette surface F est de genres un ($p_a = P_4 = 1$), possède dix points doubles biplanaires et il existe une hypersurface cubique

$$X_1^2 X_4 - X_2^2 X_3 = 0$$

passant par ces six points doubles et osculant F en tout point d'intersection. Cette surface représente donc bien une involution cyclique d'ordre trois appartenant à une surface de genre un.

8. Supposons maintenant que les six points $A_1, A_2, \ldots$

(1) *Sur le contact de surface le long de courbes* (Bulletin de la Soc. royale des Sc. de Liége, 1944, pp. 46-58).

A_6, doubles biplanaires de la surface F, appartiennent à un même hyperplan Σ, les transformations T_1, T_2 étant toujours distinctes. Projetons encore la surface F du point A, sur un hyperplan S_3 ne passant pas par A_2 et soit σ le plan suivant lequel Σ coupe S_3. Le plan σ contient donc les cinq points $A'_2, A'_3, \ldots, A'_6$, doubles biplanaires pour la surface projection F'. La section de F' par le plan σ est donc une courbe du quatrième ordre possédant cinq points doubles $A'_2, A'_3, \ldots, A'_6$, par conséquent elle dégénère en deux droites r_1, r_2 et une comique ρ. Nous supposerons que A'_2 est le point commun à r_1, r_2 ; que A'_3, A'_4 sont les points communs à la droite r_1 et à la conique ρ ; enfin que A'_5, A'_6 ont les points communs à la droite r_2 et à la conique ρ.

Conservons les notations utilisées plus haut. Les quintiques de genre deux C_1 doivent passer par les points $A'_2, A'_3, \ldots, A'_6$. De plus, chacune de ces quintiques est sur une quadrique qui coupe encore F' suivant une cubique K_2 fixe. La quadrique passant par une courbe C_1 contient les points A'_2, A'_3, A'_4 donc la droite r_1 ; elle contient également la droite r_2 qu'elle rencontre aux points A'_2, A'_5, A'_6. Comme elle contient également la courbe C_1 et que celle-ci ne peut toucher le plan σ en A'_2, elle est tangente en A'_2 à une droite n'appartenant pas au plan σ ; cette quadrique est donc un cône de sommet A'_2. Les courbes C_1 sont donc découpées sur F' par les cônes passant par r_1, r_2, de sommet A'_2 et formant un réseau. La cubique gauche K_2 dégénère en r_1, r_2 et en une droite passant par A'_2.

De tout ceci, il résulte que les couples homologues dans la transformation T_1 sont découpés sur F' par les droites passant par le point double biplanaire A'_2.

Le même raisonnement repris en partant des courbes C_2, conduit évidemment au même résultat et on en conclut que si les six points doubles biplanaires de F sont dans un même hyperplan, les transformations T_1 et T_2 coïncident, contrairement à l'hypothèse.

Il convient d'observer que les cubiques gauches K_1, K_2 ont en commun les droites r_1, r_2, mais sont complétées par des droites distinctes.

9. Proposons-nous actuellement de déterminer la surface F dans l'hypothèse où les involutions déterminées par les réseaux $|C_1|$, $|C_2|$ coïncident. Nous désignerons cette involution par I_2 et la transformation birationnelle de F en soi qui l'engendre par T.

Rapportons projectivement les courbes C_1 aux droites d'un plan ϖ ; à la surface F correspond un plan double F'' de support ϖ. Les courbes C_2 rencontrant les courbes C_1 en quatre points formant deux couples de I_2, aux courbes C_1 correspondent sur F'' des coniques doubles, formant un réseau.

Aux courbes a_{12}, a_{22}, ..., a_{62} correspondent sur F'' des points isolés par lesquels doivent passer les coniques homologues des courbes C_2. Ces points sont donc au nombre de trois et appartiennent à la courbe de diramation Δ du plan double F''. Comme les courbes C_2 de F'' doivent rencontrer Δ en six points variables, ces trois points sont doubles pour Δ.

Aux courbes a_{11}, a_{22}, ..., a_{61} correspondent sur F'' des droites qui ne peuvent rencontrer en des points variables les coniques homologues des courbes C_2 ; ces droites coïncident donc avec les côtés du triangle ayant pour sommets les trois points doubles de Δ dont il vient d'être question.

On en conclut que T échange entre eux les points A_1, A_2, ..., A_6. D'une manière précise, nous supposerons que T fait correspondre aux points A_1, A_3, A_5, respectivement les points A_2, A_4, A_6 ; aux courbes a_{11}, a_{31}, a_{51}, les courbes a_{21}, a_{31}, a_{61} et aux courbes a_{12}, a_{32}, a_{54}, les courbes a_{22}, a_{42}, a_{62}.

Désignons par A_{12}, A_{34}, A_{56} les points du plan ϖ qui correspondent aux couples A_1 et A_2, A_3 et A_4, A_5 et A_6, par Γ les coniques de ϖ, passant par A_{12}, A_{34}, A_{56}, homologues des courbes C_2.

Les coniques Γ correspondant aux courbes C_2 rencontrant chacune des courbes a_{12}, a_{22} en un point, à l'ensemble de ces courbes correspond, dans le plan ϖ, l'ensemble des points infiniment voisins de A_{12}. La courbe de diramation Δ, qui a un point double en A_{12}, ne peut avoir de points simples infiniment voisins de A_{12} ; ce point est donc un tacnode pour Δ.

A l'ensemble des courbes a_{11}, a_{21} correspond dans ϖ soit la droite $A_{12} A_{34}$, soit la droite $A_{12} A_{56}$. Comme les courbes a_{11} et a_{12} ont un point commun, de même que les courbes a_{21}, a_{22}, celle des droites envisagées qui correspond à l'ensemble des courbes a_{11}, a_{21} a dans le domaine de A_{12} un point n'appartenant pas à Δ. Supposons pour fixer les idées que ce soit la droite A_{12} A_{34}. Alors la droite $A_{12} A_{56}$ ne peut avoir un point dans le domaine de A_{12} qui n'appartienne pas à la courbe de diramation ; cette droite est donc la tangente tacnodale à Δ en A_{12}.

De même, à l'ensemble des courbes a_{32}, a_{42} correspond le domaine du point A_{34} et ce point est double tacnodal pour Δ, la tangente tacnodale étant A_{34} A_{12}. A l'ensemble des courbes a_{52}, a_{61} correspond le domaine de A_{56}, point tacnodal pour Δ, la tangente tacnodale étant A_{56} A_{34}. A l'ensemble des courbes a_{31}, a_{41} correspond la droite A_{34} A_{36} et à l'ensemble des courbes a_{51}, a_{61} correspond la droite A_{56} A_{12}.

10. Prenons le triangle A_{12} A_{34} A_{56} comme triangle de référence. L'équation de la courbe de diramation Δ peut s'écrire

$$\begin{aligned} & a_{11}x_1^2x_2^2 + a_{22}x_2^4x_3^2 + a_{33}x_3^4x_1^2 + a_{44}x_1^2x_2^2x_3^2 + a_{12}x_1^2x_2^3x_3 \\ & \quad + a_{13}x_1^3x_2x_3^2 + a_{14}x_1^3x_2^2x_3 + a_{23}x_1x_2^2x_3^3 + a_{24}x_1x_2^3x_3^2 \\ & \quad + a_{34}x_1^2x_2x_3^3 = 0. \end{aligned}$$

Considérons les cubiques

$$\lambda_1 x_1^2 x_2 + \lambda_2 x_2^2 x_3 + \lambda_3 x_3^2 x_1 + \lambda_1 x_1 x_2 x_3 = 0,$$

adjointes à la courbe Δ et rapportons-les projectivement aux hyperplans d'un espace linéaire S_3 à trois dimensions en posant

$$X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = x_1^2 x_2 : x_2^2 x_3 : x_3^2 x_1 : x_1 x_2 x_3.$$

L'élimination des x donne

$$X_1 X_2 X_3 = X_4^3$$

et l'équation de la courbe de diramation Δ donne

$$\phi(X_1, X_2, X_3, X_4) \equiv a_{11} X_1^2 + a_{22} X_2^2 + \ldots \\ + a_{34} X_3 X_4 = 0.$$

On en conclut que le plan double F″ est birationnellement identique à la surface représentée par les équations

$$X_1 X_2 X_3 = X_4^2, \qquad X_0^2 = \phi(X_1, X_2, X_3, X_4).$$

On retrouve donc la surface signalée plus haut (nº 2).

On voit sans peine qu'aux droites et aux coniques Γ de ϖ correspondent les courbes C_1, C_2 tracées sur cette surface et dont les équations ont également été données.

Liège, le 10 janvier 1946.