EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége*,
Séance du 16 mai 1946. — N° 5.

Sur certaines involutions cycliques du quatrième ordre appartenant à une surface de genres un,

par LUCIEN GODEAUX, Membre de la Société.

Dans un travail antérieur [1] nous avons signalé l'existence, sur une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$), d'involutions cycliques du quatrième ordre dont la surface image est une surface de bigenre un ($p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$). Une telle involution possède huit points unis, univariants pour T^2, mais non pour T, T étant la transformation de la surface en soi, génératrice de l'involution. Nous nous proposons d'ajouter quelques compléments à cette première note [2].

1. Soit F une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$), contenant une involution cyclique I_4, d'ordre quatre, présentant huit points unis formant quatre groupes de l'involution. Soit T la transformation birationnelle de F en soi, génératrice de l'involutîon; T^2 engendre sur F une involution d'ordre deux I_2, possédant huit points unis.

Construisons sur F un système linéaire complet $|C|$, transformé en lui même par T et contenant un système linéaire partiel $|C_{11}|$, dépourvu de points-base, appartenant à l'involution I_4, Le système $|C|$ est transformé en lui-même par T^2 et contient deux systèmes linéaires partiels $|C_1|$, $|C_2|$ appartenant à l'involution I_2. L'un, par exemple $|C_1|$, contient le système $|C_{11}|$ et est donc dépourvu de points-base. Il en résulte que le second, $|C_2|$, a pour points-base les huit points unis des involutions I_2, I_4.

Soit F' une surface image de l'involution I_2. Aux systèmes $|C_1|$, $|C_2|$ correspondent sur F' des systèmes linéaires complets $|C'_1|$, $|C'_2|$, les courbes du second passant par les huit points de diramation de F'. A la transformation T correspond une transformation birationnelle T' de F' en soi, engendrant une involution I'_2, d'ordre deux, homologue de I_4.

Les systèmes $|C'_1|$, $|C'_2|$ sont transformés chacun en soi par T'. Au système $|C_{11}|$ correspond sur F' un système linéaire $|C'_{11}|$, appartenant à $|C'_1|$, composé au moyen de l'involution I'_2.

---

(1) *Recherche des involutions de genres zéro, bigenre un, appartenant à une surface de genres un* (Annaes da Academia Polytechnica do Porto, 1916, pp. 65-78).

(2) On trouvera des renseignements sur les théories que nous appliquons ici dans notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Paris, Hermann, 1935).

L'involution I'_2 sur F' est dépourvue de points unis, car à un tel point correspondrait sur F un point invariant pour T. Il en résulte que l'image F'' de I'_2 est une surface de bigenre un ($p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$).

Sur cette surface F'' correspond au système $|C'_{11}|$ un système linéaire complet $|C''_{11}|$.

2. Désignons par π le genre des courbes C''_{11}. On sait que $|C''_{11}|$ est de degré $2\pi - 2$ et de dimension $\pi - 1$. Il en résulte que les courbes C'_{11} et par conséquent les courbes C'_1 sont, d'après la formule de Zeuthen, de genre $2\pi - 1$. Le système $|C'_1|$ a par conséquent le degré $4\pi - 4$ et la dimension $2\pi - 1$, car F' est de genres un ($p_a = P_4 = 1$).

Entre une courbe C'_1 et la courbe C_1 homologue, nous avons une correspondance (1, 2) privée de points unis; par conséquent la courbe C_1 est de genre $4\pi - 3$. Il en est de même des courbes C et le système $|C|$ a le degré $8\pi - 8$ et la dimension $4\pi - 3$.

T' transforme en lui-même $|C'_1|$ et il y a, dans $|C'_1|$, un système $|C'_{11}|$ appartenant à I'_2. Par conséquent, il existe dans $|C'_1|$ un second système $|C'_{12}|$, appartenant à l'involution I'_2. Le système $|C''_{12}|$ qui correspond sur F' à $|C'_{12}|$ est complet, de genre π, de degré $2\pi - 2$ et de dimension $\pi - 1$. Les systèmes $|C''_{11}|$, $|C''_{12}|$ sont adjoints l'un de l'autre.

Sur la surface F, le système $|C_2|$ a la dimension $2\pi - 3$ et le système $|C'_2|$ a donc le genre $2\pi - 3$ et le degré $4\pi - 8$. Il est transformé en lui-même par T' et contient donc deux systèmes linéaires partiels, $|C'_{21}|$, $|C'_{22}|$ appartenant à l'involution I'_2. A chacun de ces systèmes correspond sur F'' un système linéaire complet. Désignons par $|C''_{21}|$, $|C''_{22}|$ un système. D'après la formule de Zeuthen, les courbes C''_{21}, C''_{22} ont le même genre $\pi - 1$. F'' étant de bigenre un, $|C''_{21}|$ et $|C''_{22}|$ ont le degré $2\pi - 4$ et la dimension $\pi - 2$. Ils sont l'adjoint l'un de l'autre.

Observons que les systèmes $|C''_{21}|$, $|C''_{22}|$ découpent, sur chacune des courbes C''_{11}, C''_{12}, des séries paracanoniques.

Les courbes C''_{11}, C''_{12} découpent, sur chacune des courbes C''_{21}, C''_{22}, des séries non spéciales d'ordre $2\pi - 2$ et de dimension $\pi - 1$ (sur C''_{21}, C''_{22}, la série canonique est non $g_2{}^{\pi-2}_{\pi-4}$).

3. Rapportons projectivement les courbes C''_{11} aux hyperplans d'un espace linéaire $S_{\pi-1}$. La surface F'' se transforme birationnellement en une surface d'ordre $2\pi - 2$, à sections hyperplanes C''_{11} de genre π, que nous continuerons à désigner par F''. Aux points unis de I_4 correspondent sur F'' quatre points doubles coniques, équivalents à quatre courbes rationnelles de degré — 2 que nous désignerons par $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$.

Sur la surface F'' nous avons

$$2C''_{11} \equiv 2C''_{12}. \qquad 2C''_{21} \equiv 2C''_{22}.$$

A une courbe C de F correspond sur F'' une courbe C'' de genre π, possédant $8\pi - 8$ points doubles variables avec la courbe. Faisons varier d'une manière continue C dans $|C|$; la courbe C'' varie d'une manière continue sur F'' dans un système linéaire $|C''|$ de genre $9\pi - 8$. Lorsque C sur F tend vers une courbe C_{11} (ou C_{12}), C'' sur F'' tend vers une courbe $4C''_{11}$ (ou $4\ C''_{12}$). Lorsque, sur F, C tend vers une courbe C_{21}, sur F'', C''_{21} tend vers la courbe

$$4C''_{21} + 2(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4).$$

On a donc

$$4C''_{11} \equiv 4C''_{12} \equiv 4C''_{21} + 2(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4). \tag{1}$$

On a de même

$$4C''_{11} \equiv 4C''_{12} \equiv 4C''_{22} + 2(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4). \tag{2}$$

Projectivement, cela signifie que le long d'une courbe C''_{21} ou C''_{22}, il existe en général une hypersurface du quatrième ordre ayant un contact du troisième ordre avec la surface F''.

Le fait que les courbes C''_{21}, C''_{22} satisfont aux relations fonctionnelles (1) et (2), tout en étant distinctes, s'explique en tenant compte que sur une surface de bigenre un, le diviseur de Severi σ est égal à 2.

4. L'existence de surfaces de genres un contenant une involution du quatrième ordre du type envisagé ici est prouvée par un exemple que nous avons donné dans notre note citée plus haut. En voici un autre :

Considérons la surface F d'équation

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 + a x_1 x_2 x_3 x_4 = 0,$$

qui est de genres un. Elle est transformée en elle-même par l'homographie

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_2 : x_3 : x_4 : x_1, \tag{T}$$

cyclique de période quatre. Cette homographie possède quatre points unis qui n'appartiennent pas à la surface.

L'homographie T^2, d'équation

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_3 : x_4 : x_1 : x_2,$$

est harmonique et a comme axes les droites

$$x_1 + x_3 = 0, \qquad x_2 + x_4 = 0$$

et

$$x_1 - x_3 = 0, \qquad x_2 - x_4 = 0.$$

Ces droites coupent F en huit points unis pour T^2, mais non pour T.

Considérons le système de quadriques

$$\lambda_1 (x_1^2 + x_3^2) + \lambda_2 (x_2^2 + x_4^2) + \lambda_3 x_1 x_3 + \lambda_4 x_2 x_4$$
$$+ \lambda_5 (x_1 x_2 + x_3 x_4) + \lambda_6 (x_1 x_4 + x_2 x_3) = 0,$$

transformé en lui-même par T^2, et rapportons-le projectivement aux hyperplans d'un espace linéaire S_5 en posant

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_6 X_6 = 0.$$

A la surface F correspond la surface F′ d'équations

$$X_5^2 + X_6^2 = X_1 X_2 + 4 X_3 X_4,$$
$$X_5 X_6 = X_1 X_4 + X_2 X_3,$$
$$X_1^2 + X_2^2 + a X_3 X_4 = 2 X_3^2 + 2 X_4^2.$$

A la transformation T correspond l'homographie

$$\frac{X'_1}{X_2} = \frac{X'_2}{X_1} = \frac{X'_3}{X_4} = \frac{X'_4}{X_3} = \frac{X'_5}{X_6} = \frac{X'_6}{X_5}. \qquad (T')$$

Cette homographie est harmonique et ses axes sont les plans

$$X_1 + X_2 = 0, \qquad X_3 + X_4 = 0, \qquad X_5 + X_6 = 0$$

et

$$X_1 - X_2 = 0, \qquad X_3 - X_4 = 0, \qquad X_5 - X_6 = 0.$$

Ces axes ne rencontrent pas la surface F′ et par conséquent l'homographie T′ engendre sur F′ une involution du second ordre, privée de points unis, par conséquent de genres zéro et de bigenre un.

Liége, le 16 mai 1946.

M. HAYEZ, Impr. de l'Académie royale, 112, rue de Louvain, Bruxelles
(Domicile légal: rue de la Chancellerie, 4)