Extrait des *Comptes rendus du Congrès des Sciences Mathématiques de Liége*
(17-22 juillet 1939)

Construction de quelques surfaces algébriques

par M. Lucien Godeaux (Liége)

Nos recherches sur les involutions appartenant à des surfaces algébriques nous ont conduit à la construction de surfaces, matériel qui nous sert à prouver l'existence des involutions étudiées. Dans cette note, nous indiquons la construction de certaines familles de surfaces.

1. Considérons la surface Φ, d'ordre m^2, obtenue en rapportant projectivement aux hyperplans d'un espace S_r, à $r = \frac{1}{2} m\,(m+3)$ dimensions, les courbes d'ordre m d'un plan ϖ. Aux droites du plan ϖ correspondent sur Φ des courbes rationnelles normales d'ordre m, Γ_1, appartenant à des espaces linéaires à m dimensions. A une courbe d'ordre k $(< m)$ de ϖ correspond sur Φ une courbe Γ_k, d'ordre mk, appartenant à un espace linéaire à $mk - \frac{1}{2}(k-1)(k-2)$ dimensions.

Plaçons-nous dans un espace S_{r+1} à $r+1$ dimensions et soit V_3 le cône projetant la surface Φ d'un point O n'appartenant pas à l'espace S_r. Une courbe Γ_k, d'ordre mk, est projetée de O suivant un cône d'ordre mk, V_2. Nous supposerons $0 < k < m$.

Considérons la surface F qui, avec le cône V_2, forme l'intersection du cône V_3 et d'une hypersurface V_r^n d'ordre n, ayant un point simple en O. Le cône V_2 étant situé dans un espace linéaire, on a nécessairement $n \geqslant km$.

La surface F est d'ordre $m(mn-k)$. Le point O est multiple d'ordre m^2 pour le cône V_3 et multiple d'ordre km pour le cône V_2, donc il est multiple d'ordre $m(m-k)$ pour la surface F. Au point de vue des transformations birationnelles, le domaine de ce point sur la surface F est équivalent à une courbe que nous désignerons par D.

Une courbe Γ_1 est projetée de O suivant un cône d'ordre m coupant l'hypersurface V_r^n suivant une courbe formée de k droites appartenant au cône V_2^n et d'une courbe C, d'ordre $mn - k$, appartenant à la surface F. Sur celle-ci, les courbes C forment un réseau $|C|$; ce réseau a le degré $n - 1$.

L'intersection de V_r^n et du cône projetant une courbe Γ_1 de O a un point multiple d'ordre m en ce point, par conséquent les courbes C ont un point multiple d'ordre $m - k$ en O. En d'autres termes, les courbes C rencontrent la courbe D en $m-k$ points.

En projetant le cône d'ordre m contenant une courbe C de $m - 1$ de ses points sur un plan, il correspond à la courbe C une courbe d'ordre $mn - k$, ayant un point multiple d'ordre $mn - k - n + 1$, auquel sont infiniment voisins $m - 1$ points multiples d'ordre $n - 1$. Le genre π des courbes C est donc

$$\pi = \frac{1}{2} m (n + 1) (n - 2) - (k + 1) (n - 2) .$$

Parmi les sections hyperplanes de F, il en est qui sont formées de m courbes C, ces courbes appartenant à des espaces linéaires à $m + 1$ dimensions, ayant deux à deux une droite en commun. En tenant compte de la courbe D, on voit que le système des sections hyperplanes de F est $|mC + D|$.

2. Considérons la section de F par un hyperplan ξ ne passant pas par O. La section du cône V_3 par ξ est une surface analogue à Φ et l'on peut supposer, sans restriction, que c'est la surface Φ elle-même. Dans ces conditions, à la section de F par l'hyperplan ξ, correspond dans le plan ϖ une courbe d'ordre $mn - k$. Les adjointes à cette courbe sont les courbes d'ordre $mn - k - 3$. A ces courbes correspondent, sur la surface F, des courbes équivalentes à $mn - k - 3$ courbes C, augmentées d'un certain nombre de fois la courbe infinitésimale D. Nous aurons donc

$$|(mC + D)'| = |(mn - k - 3)\, C + \lambda\, D| ,$$

λ étant un entier.

De la relation précédente, on déduit

$$|C'| = |(mn - m - k - 2)\, C + (\lambda - 1)\, D| .$$

Les courbes C' doivent rencontrer une courbe C en $2\pi - 2$ points; on en déduit $\lambda = n - 2$.

Il en résulte que *le système canonique de la surface* F *est*

$$|C' - C| = |(mn - m - k - 3)\,C + (n - 3)\,D|.$$

Observons d'autre part que les adjointes à la courbe d'ordre $mn - k$ considérée plus haut dans le plan ϖ, découpent sur cette courbe la série canonique complète, par conséquent, les adjointes à une section hyperplane de F jouissent de la même propriété et *la surface* F *est régulière.*

3. Examinons quelques cas particuliers de la surface F.

Les surfaces F pour lesquelles le système canonique n'existe pas sont caractérisées par

$$m > k > m\,(n-1) - 3,\; n \geqslant km,\; k \geqslant 1.$$

En dehors du cas trivial $n = 1$, on peut avoir $n = 2$, $m = 2$, $k = 1$. Les courbes C sont des cubiques gauches formant un système homaloïdal; la surface F est rationnelle.

Les surfaces F pour lesquelles les courbes canoniques sont d'ordre zéro sont caractérisées par

$$k = m\,(n-1) - 3,\; n \geqslant km,\; 0 < k < m.$$

Un seul cas peut se présenter : $n = 3$, $m = 2$, $k = 1$. Les courbes C sont d'ordre cinq, de genre deux et de degré deux. Le point O est double conique pour la surface F et celle-ci est birationnellement équivalente à un plan double ayant une sextique de diramation.

Les surfaces F pour lesquelles les courbes canoniques sont les courbes C, sont caractérisées par $n = 3$ et, en tenant compte de $k > 0$, on ne trouve aucune surface satisfaisant à cette condition.

Enfin, les surfaces F dont les sections hyperplanes sont les courbes canoniques (surfaces projectivement canoniques), sont caractérisées par

$$k = m\,(n-2) - 3.$$

On trouve, en tenant compte de $k > 0$, un seul cas : $n = 4$, $m = 2$, $k = 1$. Le système canonique de la surface F est

$$|C' - C| = |2\,C + D|.$$

Les courbes C sont d'ordre sept, de genre six et de degré trois. Le point O est double conique pour la surface F.

L'hypothèse $n = 3$ entraîne $k = 0$.

Imp. G. Thone, Liège