COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur la surface du quatrième ordre contenant trente-deux droites,

par Lucien Godeaux, Membre de l'Académie.

La surface du quatrième ordre contenant trente-deux droites que nous nous proposons de considérer dans cette note a été étudiée en premier lieu par M. Traynard (1), qui l'a obtenue comme lieu d'un point dont les coordonnées sont proportionnelles aux fonctions thêta impaires, d'ordre six, de caractéristique nulle, relatives au tableau de périodes

$$\begin{array}{cccc} \dfrac{2i\pi}{3} & 0 & a & b \\ 0 & 2i\pi & b & c. \end{array}$$

Cette surface représente donc une involution du second ordre ayant seize points unis, appartenant à une surface de Picard de diviseur trois. Les trente-deux droites de la surface se partagent en deux groupes de seize droites deux à deux gauches, chaque droite d'un groupe rencontrant dix droites de l'autre, d'une manière qui a été fixée par M. Traynard. Celui-ci a montré que cet arrangement des trente-deux droites était caractéristique de la surface. Plus

(1) *Sur les fonctions thêta de deux variables et les surfaces hyperelliptiques* (*Annales de l'Ecole Normale supérieure*, 1907, pp. 77-177).

tard, M. Chillemi a établi, en utilisant un théorème dû à MM. Enriques et Severi (1), que la surface était caractérisée par le fait de posséder seize droites deux à deux gauches et une droite rencontrant dix des premières (2).

Dans ce travail, nous reprenons l'étude de la surface en la considérant comme l'image d'une involution du second ordre appartenant à une surface de Picard de diviseur trois; nous retrouvons le résultat de M. Chillemi, mais en outre, nous établissons que la surface est l'image d'une seconde involution appartenant à une surface de Picard de diviseur trois. D'une manière précise, nous arrivons au résultat suivant :

Soit Φ *une surface du quatrième ordre contenant seize droites* γ_{ik} $(i, k=1, 2, 3, 4)$ *deux à deux gauches et une droite* δ_{11} *rencontrant les droites* γ_{11}, γ_{22}, γ_{23}, γ_{24}, γ_{32}, γ_{33}, γ_{34}, γ_{42}, γ_{43}, γ_{44}. *La surface* Φ *représente une involution du second ordre, appartenant à une surface de Picard de diviseur trois, la courbe de diramation étant formée des seize droites* γ_{ik}. *Il existe sur la surface seize droites* δ_{ik}, *chacune de ces droites rencontrant dix des droites* γ_{ik} *(les six droites* γ_{ik} *que la droite* δ_{jh} *ne rencontre pas sont celles pour lesquelles on a* $i=j$, $k\neq h$ ou $k=h$, $i\neq j$). *La surface* Φ *représente une involution du second ordre appartenant à une seconde surface de Picard de diviseur trois, la courbe de diramation étant formée de seize droites* δ_{ik}.

Nous donnons ensuite quelques indications sur les courbes tracées sur la surface Φ.

Nous nous appuyons, dans nos développements, sur les travaux de MM. Enriques et Severi déjà cités (3) et, d'une

(1) *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques* (*Acta Mathematica*, 1909, t. 32, pp. 283-392; t. 33, pp. 321-399).

(2) *Sur les surfaces hyperelliptiques* (*C. R.*, 1909, t. 148, pp. 1091-1093).

(3) Voir aussi, au sujet des surfaces hyperelliptiques, les travaux de M. E. Picard, de G. Humbert et de Bagnera et M. De Franchis, que nous avons cités dans notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (*Actualités scient. et indust.*, n° 270; Paris, Hermann, 1935).

manière générale, sur les propriétés des involutions appartenant à une surface algébrique (1); nous utilisons également certains résultats de M. Traynard.

1. Soit F une surface de Picard de diviseur trois, c'est-à-dire une surface dont les coordonnée des points peuvent s'exprimer en fonctions uniformes quadruplement périodiques de deux paramètres, dont les périodes primitives peuvent être ramenées à un tableau normal de la forme

$$\begin{matrix} 1 & 0 & g & h \\ 0 & \frac{1}{3} & h & g'. \end{matrix}$$

La surface F contient un système continu complet $\{D$ de courbes D de genre quatre, de degré six et de dimension quatre formé d'une variété continue de ∞^2 systèmes linéaires $|D|$, complets, de dimension deux (2). Nous supposerons la surface F à modules généraux. On sait qu'alors, la variété V à deux dimensions dont les points représentent les systèmes linéaires $|D|$ du système continu $\{D\}$ est à son tour une surface de Picard, dépourvue de courbes elliptiques.

La surface F contient une involution I_2, d'ordre deux, possédant seize points unis. Désignons par T la transformation birationnelle involutive de F en elle-même génératrice de l'involution I_2. La transformation T transforme en lui-même le système $\{D\}$, mais non chacun des systèmes linéaires $|D|$.

Désignons par Φ une surface image de l'involution I_2; on sait que cette surface est de genres un $(p_a = P_4 = 1)$. A la transformation T correspond une transformation birationnelle involutive T' de la surface V en elle-même, engendrant une involution qui doit, comme la surface Φ, être régulière; elle possède par conséquent seize points unis. En

(1) Voir notre exposé sur *Les involutions cycliques...* (*loc cit.*).
(2) Enriques-Severi, *loc. cit.*

d'autres termes, il existe seize systèmes linéaires $|D|$ transformés en eux-mêmes par T.

2. Pour construire un modèle projectif normal de la surface Φ, nous suivrons la méthode classique.

A une courbe D quelconque correspond sur la surface Φ une courbe Δ de genre quatre, mais cette courbe Δ a pour homologue sur F la courbe D et sa transformée par T. Ces deux courbes D ont six points communs formant trois couples de l'involution I_2. Par conséquent, la courbe Δ possède trois points doubles. Lorsque la courbe D décrit le système continu $\{D\}$, la courbe Δ décrit un système continu qui appartient totalement à un système linéaire, puisque la surface Φ est régulière. Ce système linéaire est de genre sept et par conséquent, puisque la surface Φ est de genres un, de degré douze et de dimension sept. Nous le désignerons provisoirement par $|\Gamma|$. En rapportant projectivement les courbes Γ aux hyperplans d'un espace linéaire S_7 à sept dimensions, on transforme birationnellement Φ en une surface normale d'ordre douze, que nous désignerons encore par Φ.

On sait qu'aux seize points unis de l'involution I_2 correspondent seize points doubles coniques de la surface Φ, chacun de ces points étant équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à une courbe rationnelle de degré -2.

Aux courbes Γ correspondent sur la surface F des courbes C de genre treize et de degré vingt-quatre, formant un système linéaire $|C|$ de dimension onze, transformé en lui-même par T. D'après ce qui précède, on a évidemment

$$|C| = |2D|.$$

La transformation T transformant $|C|$ en lui-même, ce système contient deux systèmes linéaires partiels composés au moyen de l'involution I_2. L'un de ces systèmes contient les transformées des courbes Γ et est dépourvu de points-base. L'autre système a la dimension trois et est formé de courbes passant simplement par les seize points unis de l'involution I_2. A ces courbes correspondent sur Φ des courbes que nous désignerons par Γ_0, de genre trois, de degré quatre, formant un système linéaire $|\Gamma_0|$ de dimension trois. Les courbes Γ_0 passent par les seize points doubles coniques de la surface Φ, en ce sens qu'elles rencontrent en un point (variable) chacune des courbes rationnelles de degré -2, équivalentes à ces points doubles.

En rapportant projectivement les courbes Γ_0 aux plans d'un espace ordinaire S_3, la surface Φ se transforme birationnellement en une surface Φ_0, du quatrième ordre. Aux points doubles de la surface Φ correspondent sur Φ_0 seize droites ne se rencontrant pas deux à deux.

3. Nous avons vu que le système continu $\{D\}$ contenait seize systèmes linéaires $|D|$ transformés chacun en soi-même par T. Envisageons l'un de ces systèmes et désignons-le par $|\overline{D}|$.

Supposons en premier lieu que chaque courbe $\overline{D}$ du système $|\overline{D}|$ soit transformée en elle-même par T. Alors aux courbes $\overline{D}$ correspondent sur Φ des courbes $\overline{\Delta}$ formant un réseau complet; les courbes $\overline{\Delta}$ sont par conséquent de genre deux et de degré deux, puisque la surface Φ est de genres un. Il en résulte d'une part que le degré effectif de $|\overline{D}|$ est égal à quatre et que, d'autre part, chaque courbe $\overline{D}$ passe par deux points unis de l'involution I_2. Le système $|\overline{D}|$ a donc comme points-base deux points unis de I_2 et par conséquent les courbes $\overline{\Delta}$ passant simplement par deux points doubles de Φ.

Supposons maintenant que la transformation T ne change pas en elle-même toutes les courbes du système $|\overline{D}|$. Alors la transformation T agit sur le réseau $|\overline{D}|$ dont les courbes sont considérées comme des éléments, comme une homologie harmonique; il y a donc un faisceau de courbes $\overline{D}$, soit $|\overline{D}_1|$ et une courbe $\overline{D}$ isolée, soit $\overline{D}_2$, transformées en elles-mêmes par T. Aux courbes $\overline{D}_1$, correspondent, sur Φ, de genres un, des courbes elliptiques $\overline{\Delta}_1$. En appliquant la formule de Zeuthen à la correspondance entre une courbe $\overline{\Delta}_1$ et la courbe $\overline{D}_1$ homologue; on trouve que les courbes $\overline{D}_1$ ont en commun six points unis de l'involution I_2. A la courbe $\overline{D}_2$ correspond sur Φ une courbe rationnelle $\overline{\Delta}_2$; la formule de Zeuthen montre que la courbe $\overline{D}_2$ passe par dix points unis de l'involution I_2.

Les courbes $\overline{\Delta}_1$ sont d'ordre six et rencontrent les courbes Γ_0 en trois points. La courbe $\overline{\Delta}_2$ est d'ordre six et rencontre les courbes Γ_0 en un point. Il y a donc ∞^1 courbes Γ_0 contenant $\overline{\Delta}_2$ et une courbe Γ_0 contenant une courbe $\overline{\Delta}_1$. On a donc

$$|\Gamma_0| = |\overline{\Delta}_1 + \overline{\Delta}_2|.$$

Il en résulte que les six points unis de I_2 appartenant aux courbes $\overline{D}_1$ et les dix points unis de I_2 appartenant à la courbe $\overline{D}_2$, sont distincts. Par conséquent, le système $|\overline{D}|$ est dépourvu de points-base.

On sait que les systèmes linéaires du système $\{D\}$ sont échangés entre eux par les ∞^2 transformations de seconde espèce de la surface F; par conséquent, si l'un de ces systèmes possède des points-base, il en est de même des autres. On en conclut que si le système $|\overline{D}|$ est composé au moyen de l'involution I_2 et possède par suite deux points-base (unis pour l'involution), les quinze autres systèmes linéaires de $\{D\}$ transformés en eux-mêmes par T jouissent de la même propriété. Soient $|\overline{\overline{D}}|$ un de ces systèmes et $|\overline{\overline{\Delta}}|$ le système de courbes de genre deux qui lui correspond sur Φ. On peut toujours supposer que les points-base de $|\overline{\overline{D}}|$ sont distincts de ceux de $|\overline{D}|$. Les courbes $\overline{D}$ et $\overline{\overline{D}}$ se rencontrent en six points formant trois couples de I_2, par conséquent les courbes $\overline{\Delta}$ et $\overline{\overline{\Delta}}$ se rencontrent en trois points. Les ∞^2 courbes $\overline{\overline{\Delta}}$ découpent sur une courbe $\overline{\Delta}$, de genre deux, une série linéaire d'ordre trois et de dimension deux, car aucune courbe $\overline{\overline{\Delta}}$ ne peut avoir une partie commune avec $\overline{\Delta}$. Cette conclusion est absurde, donc aucun des systèmes linéaires de $\{D\}$ invariant pour T ne peut être composé au moyen de l'involution I_2.

4. D'après ce qui précède, la surface Φ contient seize faisceaux de courbes elliptiques passant par six des seize points doubles de la surface et seize courbes rationnelles de degré -2 passant par dix de ces points doubles. Ces seize courbes rationnelles sont rencontrées en un point par les courbes Γ_0 et par conséquent il leur correspond seize droites sur la surface Φ_0. Celle-ci contient donc trente-deux droites.

On pourrait, par des raisonnements géométriques simples, mais assez longs, déterminer la distribution des seize points doubles de la surface Φ en groupes de six points appartenant aux courbes elliptiques des faisceaux dont il vient d'être question; nous ne le ferons pas. La surface Φ_0 est, par sa définition même, la surface du quatrième ordre à trente-deux droites considérée par M. Traynard, et celui-ci a montré que la distribution en question peut être obtenue en utilisant l'algorithme de G. Humbert. Soient α, β, γ, δ et α', β', γ', δ' deux permutations des nombres 1, 2, 3, 4. Nous représenterons les seize points doubles de la surface Φ par la notation P_{ik} et les seize faisceaux de courbes elliptiques par $|\Delta_{ik}|$. Les courbes du faisceau $|\Delta_{\alpha\alpha'}|$ passent par les points $P_{\alpha\beta'}$, $P_{\alpha\gamma'}$, $P_{\alpha\delta'}$, $P_{\beta\alpha'}$, $P_{\gamma\alpha'}$, $P_{\delta\alpha'}$. Le point $P_{\alpha\alpha'}$ appartient aux courbes $\Delta_{\alpha\beta'}$, $\Delta_{\alpha\gamma'}$, ..., $\Delta_{\delta\alpha'}$.

Désignons par δ_{ik} la courbe rationnelle de degré -2 passant par les points doubles de Φ qui n'appartiennent pas aux courbes Δ_{ik}. D'autre part, nous désignerons par γ_{ik} la courbe rationnelle de degré -2 équivalente, au point de vue des transformations birationnelles, au point double conique P_{ik} de Φ. Nous utiliserons du reste les mêmes notations pour représenter des courbes homologues sur la surface Φ et la surface Φ_0 : ainsi, δ_{ik} sera, sur la surface Φ, une courbe rationnelle du sixième ordre et, sur la surface Φ_0, une droite; γ_{ik} sera, sur la surface Φ, le domaine du point double P_{ik} et sur la surface Φ_0, une droite.

Sur la surface Φ_0, les droites δ_{ik} ne se rencontrent pas deux à deux.

5. Avant d'aller plus loin, rappelons un résultat obtenu par MM. Enriques et Severi. Sur la surface Φ, nous avons la relation fonctionnelle

$$2\,\Gamma \equiv 2\,\Gamma_0 + \Sigma\gamma_{ik}\,, \quad (i,k = 1,2,3,4)\,.$$

Projectivement, cela signifie qu'il existe, le long de chaque courbe Γ_0, une hyperquadrique touchant la surface Φ.

L'existence d'une hyperquadrique touchant la surface Φ en chaque point d'intersection et passant par les seize points doubles de cette surface, suffit pour affirmer que la surface Φ représente une involution du second ordre appartenat à une surface de Picard de diviseur trois. La courbe de contact de l'hyperquadrique est une courbe Γ_0 satisfaisant à la relation fonctionnelle précédente.

6. Revenons aux propriétés des surfaces Φ et Φ_0. Sur la surface Φ, d'ordre douze, les courbes Γ_0 sont d'ordre douze, par conséquent, sur la surface Φ_0, les courbes Γ sont d'ordre douze. Les courbes Γ sont de genre sept, rencontrent en six points chacune des seize droites δ_{ik}, mais ne rencontrent pas les seize droites γ_{ik}.

Retournons à la surface F et considérons par exemple le système linéaire $|D_{11}|$ comprenant les courbes transformées des courbes Δ_{11} et δ_{11}. La transformée de cette dernière courbe, comptée deux fois, appartient au système $|C|$ et précisément à celui des systèmes composés au moyen de I_2, appartenant à $|C|$, transformé de $|\Gamma|$. On en conclut qu'il existe un hyperplan de S_7 touchant la surface Φ le long de la courbe δ_{11}. On aura donc, en tenant compte des dix points doubles de Φ appartenant à la courbe δ_{11}, la relation fonctionnelle

$$\Gamma \equiv 2\,\delta_{11} + \gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{23} + \gamma_{24} + \gamma_{32} + \gamma_{33} + \gamma_{34} + \gamma_{42} + \gamma_{43} + \gamma_{44}\,, \qquad (1)$$

valable sur Φ et sur Φ_0.

Les surfaces du sixième ordre de l'espace S_3 découpent sur la surface Φ_0 le système $|6\,\Gamma_0|$, de degré 144, de genre 73 et de dimension 73. Ces surfaces du sixième ordre découpent sur une courbe Γ une série d'ordre 72 et de dimension $72-7=65$, g^{65}_{72}. Il y a donc ∞^7 courbes du système $|6\,\Gamma_0|$ contenant une courbe Γ. Désignons par Γ' les courbes qui complètent les courbes de ce système contenant une courbe Γ. On a donc

$$\Gamma + \Gamma' \equiv 6\,\Gamma_0\,.$$

Les courbes Γ' forment un système linéaire $|\Gamma'|$ de dimension sept, donc de genre sept et de degré douze. Elles rencontrent chacune des seize droites γ_{ik} en six points, mais ne rencontrent pas les droites δ_{ik}. D'après le théorème du reste, les surfaces du sixième ordre passant par une courbe du système $|\Gamma'|$, découpent sur la surface Φ_0 le système complet $|\Gamma|$. En particulier, par toute courbe Γ' passe une surface du sixième ordre touchant la surface Φ_0 le long de la droite δ_{11} et contenant les courbes γ_{ik} figurant dans la relation (1).

7. Partons maintenant d'une surface Φ_0 du quatrième ordre contenant seize droites γ_{ik} ne se rencontrant pas deux à deux et une droite δ_{11} rencontrant les droites γ_{11}, γ_{22}, γ_{23}, γ_{24}, γ_{32}, γ_{33}, γ_{34}, γ_{42}, γ_{43}, γ_{44}, mais non les autres droites γ_{ik}.

Il existe ∞^{73} surfaces du sixième ordre ne contenant pas Φ_0 comme partie. Celles de ces surfaces passant par sept points de la droite δ_{11} contiennent cette droite et sont en nombre ∞^{66}. Ces surfaces coupent encore Φ_0 suivant des courbes d'ordre 23 s'appuyant en huit points sur la droite δ_{11}. Les surfaces envisagées touchant la surface Φ_0 en neuf points de la droite δ_{11} touchent cette surface le long de cette droite et sont en ombre ∞^{57}. Enfin il y a ∞^7 de ces surfaces passant par les dix droites $\gamma_{11}, \gamma_{22}, \ldots, \gamma_{44}$. Une de ces surfaces rencontre encore Φ_0 suivant une courbe Γ' d'ordre douze, de genre sept et les surfaces du sixième ordre passant par cette courbe Γ' découpent sur Φ_0 un système $|\Gamma|$ de courbes d'ordre douze et de genre sept, tel que l'on ait

$$|\Gamma| = |2\,\delta_{11} + \gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{23} + \gamma_{24} + \gamma_{32} + \gamma_{33} + \gamma_{34} + \gamma_{42} + \gamma_{43} + \gamma_{44}| \,.$$

Observons que les courbes Γ ne rencontrent aucune des seize droites γ_{ik} mais s'appuyent en six points sur la droite δ_{11}. Les courbes Γ' ne rencontrent pas la droite δ_{11} mais s'appuient en six points sur chacune des six droites γ_{ik}.

Considérons les surfaces du sixième ordre passant par une courbe Γ' déterminée et par les droites $\gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{14}, \gamma_{21}, \gamma_{31}, \gamma_{41}$. Il y en a ∞^1 (ne contenant pas Φ_0 comme partie) coupant encore Φ_0 suivant des courbes du sixième ordre rencontrant δ_{11} en six points. Il en résulte que ces courbes du sixième ordre se composent de deux cubiques sections de Φ_0 par des plans passant la droite δ_{11}. Ces cubiques sont les courbes Δ_{11} ou $\Gamma_0 - \delta_{11}$. On a donc

$$|\Gamma| = |2(\Gamma_0 - \delta_{11}) + \gamma_{12} + \gamma_{13} + \gamma_{14} + \gamma_{21} + \gamma_{31} + \gamma_{41}| \,.$$

On conclut des deux relations fonctionnelles qui viennent d'être obtenues, par addition,

$$|2\Gamma| = |2\Gamma_0 + \Sigma\gamma_{ik}| \,, \quad (i,k = 1, 2, 3, 4) \,.$$

Le système linéaire $|\Gamma|$, de genre et dimension sept, est de degré douze. En rapportant projectivement les courbes Γ aux hyperplans d'un espace linéaire S_7, on transforme birationnellement Φ_0 en une surface d'ordre douze, possédant seize points doubles coniques homologues des droites γ_{ik}. Il résulte de la dernière relation fonctionnelle obtenue, d'après le théorème de MM. Enriques et Severi rappelé plus haut, que la surface Φ et par suite la surface Φ_0 sont des images d'une involution du second ordre appartenant à une surface de Picard de diviseur trois.

8. Nous allons maintenant rechercher une relation fonctionnelle entre les courbes Γ', Γ_0 et les seize droites δ_{ik}.

Les droites γ_{11}, γ_{22}, γ_{33} déterminent une quadrique Q_1. Les droites précédentes sont rencontrées par les droites δ_{11}, δ_{22}, δ_{33} et δ_{44}, qui appartiennent donc à Q_1. La droite γ_{44} rencontre les quatre droites précédentes et appartient donc à Q_1. Cette quadrique rencontre donc Φ_0 suivant les huit droites γ_{11}, γ_{22}, γ_{33}, γ_{44} et δ_{11}, δ_{22}, δ_{33}, δ_{44}.

De même, la quadrique Q_2 déterminée par les droites γ_{12}, γ_{23}, γ_{34} contient les droites δ_{12}, δ_{23}, δ_{34}, δ_{41} et par suite la droite γ_{41}.

La quadrique Q_3 déterminée par les droites γ_{13}, γ_{24}, γ_{31} contient les droites δ_{13}, δ_{24}, δ_{31}, δ_{42} et γ_{42}.

Enfin, les huit dernières droites γ_{14}, γ_{21}, γ_{32}, γ_{43} et δ_{14}, δ_{21}, δ_{32}, δ_{43} appartiennent à une même quadrique Q_4 ([1]).

L'ensemble des quadriques Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 constitue une surface du huitième ordre rencontrant la surface Φ_0 suivant les trente-deux droites γ_{ik} et δ_{ik}. Nous avons donc

$$8\,\Gamma_0 \equiv \Sigma\gamma_{ik} + \Sigma\delta_{ik}\,, \quad (i,k = 1, 2, 3, 4)\,.$$

Rapprochant cette relation de celles

$$6\Gamma_0 \equiv \Gamma + \Gamma'\,, \qquad 2\Gamma \equiv 2\Gamma_0 + \Sigma\gamma_{ik}$$

rencontrées plus haut, on voit que l'on a

$$2\Gamma' \equiv 2\Gamma_0 + \Sigma\delta_{ik}\,, \quad (i,k = 1, 2, 3, 4)\,.$$

En rapportant projectivement les courbes Γ', de genre sept et de degré douze, aux hyperplans d'un espace linéaire S_7, la surface Φ_0 se transforme en une surface Φ' possédant

([1]) L'existence de quadriques coupant Φ_0 suivant quatre droites γ_{ik} et quatre droites δ_{ik} a été établie par M. Traynard.

seize points doubles coniques homologues des droites δ_{ik}. A cause de l'existence du système $|\Gamma_0|$, le théorème de MM. Enriques et Severi permet d'affirmer que la surface Φ' est l'image d'une involution du second ordre appartenant à une surface de Picard F', de diviseur trois.

Nous voyons donc que la surface Φ_0 représente des involutions du second ordre appartenant à des surfaces de Picard F, F' de diviseur trois. Pour l'une de ces involutions, la courbe de diramation est formée des seize droites γ_{ik}; pour la seconde, la courbe de diramation est formée des seize droites δ_{ik}.

9. Nous avons rencontré plus haut un système linéaire $|C|$, de genre treize, de degré vingt-quatre et de dimension onze, tracé sur F, comprenant les transformés des systèmes $|\Gamma|$ et $|\Gamma_0|$ de la surface Φ. Ce système appartient à un système continu complet $\{C\}$, transformé en lui-même par T, formé de ∞^2 systèmes linéaires de mêmes caractères que $|C|$. Les ∞^2 systèmes linéaires de $\{C\}$ sont représentés par les points de la variété de Picard V et par conséquent, il y en a seize qui sont transformés en eux-mêmes par T.

D'autre part, nous avons trouvé

$$|C| = |2D|$$

et, par conséquent, nous avons

$$\{C\} = \{2D\}.$$

Les systèmes linéaires de $\{C\}$ transformés en eux-mêmes par T seront donc obtenus en partant des systèmes linéaires de $\{D\}$ possédant la même propriété.

Désignons par D'_{ik} les transformées sur F des courbes Δ_{ik}, par D''_{ik} la transformée de δ_{ik}. Les courbes D'_{ik}, D''_{ik} appartiennent à un même système linéaire que nous désignerons par $|D_{ik}|$.

Les courbes $2\,D'_{ik}$, $2\,D''_{ik}$ ont pour homologues sur Φ des courbes Γ et les courbes $D'_{ik} + D''_{ik}$, des courbes Γ_0.

Envisageons par exemple le système linéaire

$$| C_1 | = | D_{11} + D_{12} | .$$

Il appartient au système $\{C\}$ et est transformé en lui-même par T.

Les courbes $D'_{11} + D'_{12}$ passent simplement par les points unis P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22}, P_{31}, P_{32}, P_{41}, P_{42} et doublement par P_{13} et P_{14}. La courbe $D''_{11} + D''_{12}$ passe simplement par P_{11}, P_{12}, ..., P_{42} et doublement par P_{23}, P_{24}, P_{33}, P_{34}, P_{43}, P_{44}. Ces courbes sont transformées en elles-mêmes par T; elles appartiennent à un système linéaire partiel, compris dans $|C_1|$, composé au moyen de l'involution I_2 et ayant pour points-base simples P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22}, P_{31}, P_{32}, P_{41} et P_{42}. Sur la surface Φ il leur correspond des courbes Γ_{11}, de genre cinq, formant un système linéaire complet $|\Gamma_{11}|$ de degré huit et de dimension cinq.

De même, les courbes $D'_{11} + D''_{12}$, $D'_{12} + D''_{11}$ appartiennent à un même système linéaire compris dans $|C_1|$, composé au moyen de l'involution I_2, ayant pour points-base simples P_{13}, P_{14}, P_{23}, P_{24}, P_{33}, P_{34}, P_{43}, P_{44}. A ce système correspond sur Φ un système linéaire complet $|\Gamma_{12}|$, de genre cinq, de degré huit et de dimension cinq.

Il est facile de voir que l'on a les relations fonctionnelles, sur la surface Φ,

$$2\Gamma \equiv 2\Gamma_{11} + \gamma_{11} + \gamma_{12} + \gamma_{21} + \gamma_{22} + \gamma_{31} + \gamma_{32} + \gamma_{41} + \gamma_{42} ,$$
$$2\Gamma \equiv 2\Gamma_{12} + \gamma_{13} + \gamma_{14} + \gamma_{23} + \gamma_{24} + \gamma_{33} + \gamma_{34} + \gamma_{43} + \gamma_{44} .$$

D'autre part, on peut voir que les quinze systèmes linéaires de $\{C\}$, distincts du système $|C|$ transformé de $|\Gamma|$ et transformés en eux-mêmes par T, contiennent chacun deux systèmes linéaires composés au moyen de l'involution I_2. Chacun de ces systèmes composés a la dimension cinq et possède huit points-base, unis pour l'involution I_2.

Sur la surface Φ, on obtient en correspondance trente systèmes linéaires de courbes de genre cinq, d'ordre douze, de degré huit et de dimension cinq.

En partant de la surface F', on obtiendrait trente autres systèmes analogues.

Liége, le 24 août 1939.