Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences).
Séance du 6 janvier 1945.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Construction d'une surface algébrique d'irrégularité quatre,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Les surfaces algébriques irrégulières ($p_g > p_a$) actuellement connues sont peu nombreuses : ce sont les surfaces qui représentent les couples de points d'une ou de deux courbes algébriques et les surfaces de Picard. Nous avons indiqué récemment plusieurs procédés pour construire des surfaces irrégulières. Un de ces procédés consiste à partir d'une surface représentant les couples de points (non ordonnés) d'une courbe possédant une involution cyclique irrationnelle d'ordre supérieur à deux ; la surface possède alors une involution cyclique dont l'image est une surface irrégulière (1). Un second procédé utilise le théorème que nous avons établi récemment (2), à savoir que si une surface irrégulière contient une involution cyclique régulière, elle est l'image d'une involution cyclique appartenant à une surface irrégulière. En utilisant ce théorème, nous avons pu construire une surface d'irrégularité deux (3) et deux surfaces d'irrégularité trois (4).

(1) *Sur certaines surfaces algébriques irrégulières* (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 1933, pp. 674-680).

(2) *Sur les involutions cycliques régulières appartenant à une surface irrégulière* (Bull. des Sciences Mathématiques, 1943, pp. 145-158).

(3) *Sur la construction d'une surface d'irrégularité deux* (Bulletins de l'Acad. roy. de Belgique, 1944, pp. 11-18).

(4) *Construction d'une surface algébrique irrégulière* (Bull. de l'Acad. roy.

En partant de la surface du quatrième ordre contenant 32 droites, rencontrée autrefois par M. Traynard, nous avons pu construire une surface d'irrégularité quatre ; c'est de cette surface que nous nous occupons dans cette note (¹). Nous terminons par une remarque d'un caractère général.

1. Soit Φ une surface du quatrième ordre contenant deux familles de 16 droites, les droites d'une même famille ne se rencontrant pas deux-à-deux, mais une droite d'une famille rencontrant dix droites de l'autre famille. Pour préciser la configuration formée par ces 32 droites, utilisons l'algorithme de G. Humbert : Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ deux permutations des nombres 1, 2, 3, 4. Désignons par a_{ik} les droites de la première famille, par b_{ik} celles de la seconde, i, k pouvant prendre les valeurs 1, 2, 3, 4. La droite $a_{\alpha\alpha'}$ ne rencontre plus les droites $b_{\alpha\beta'}$, $b_{\alpha\gamma'}$, $b_{\alpha\delta'}$, $b_{\beta\alpha'}$, $b_{\gamma\alpha'}$, $b_{\delta\alpha'}$. M. Traynard (²) a démontré que la surface Φ est hyperelliptique.

Il existe, sur Φ, un système linéaire $|\Gamma_1|$, de degré 12, de genre 7, de dimension 7, formé de courbes d'ordre 12, rencontrant en six points chacune des droites b, mais ne rencontrant pas en général les droites a. Si $|\Gamma_0|$ est le système des sections planes de Φ, on a la relation fonctionnelle (³)

$$2\Gamma_1 \equiv 2\Gamma_0 + \Sigma a_{ik}, \qquad (i, k = 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

En rapportant projectivement les courbes Γ_1 aux

DE BELGIQUE, 1943, pp. 408-422) ; *Sur la construction d'une surface d'irrégularité trois* (Idem, 1943, pp. 815-822).

(¹) Nous avons brièvement signalé l'existence de cette surface dans une note *Sur la construction d'une surface algébrique irrégulière* (Comptes Rendus 26 juin 1939, pp. 2045-2047).

(²) *Sur les fonctions thêta de deux variables et les surfaces hyperelliptiques* (ANNALES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, 1907, pp. 77-177).

(³) *Sur la surface du quatrième ordre contenant trente-deux droites* (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1939, pp. 539-552).

hyperplans d'un espace linéaire S_7 à 7 dimensions, Φ se transforme birationnellement en une surface normale de genre un, Φ_1. Aux droites a_{ik} correspondent 16 points doubles coniques de cette surface. La surface Φ_1 représente une involution du second ordre appartenant à une surface de Picard, F_1, de diviseur trois.

Les surfaces du sixième ordre, passant par une courbe Γ_1, découpent sur Φ des courbes Γ_2, d'ordre 12, de genre 7, formant un système linéaire $|\Gamma_2|$ de dimension 7. Les courbes Γ_2 rencontrent en six points chacune des droites a, mais ne rencontrent pas en général les droites b. On a la relation fonctionnelle

$$2\Gamma_2 \equiv 2\Gamma_0 + \Sigma b_{ik}, \qquad (i, k = 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

En rapportant projectivement les courbes Γ_2 aux hyperplans d'un espace S_7, on transforme Φ en une surface normale de genre un, Φ_2 possédant 16 points doubles coniques correspondant aux droites b. La surface Φ_2 représente une involution du second ordre appartenant à une surface de Picard F_2 de diviseur trois.

2. Entre Φ et F_1, d'une part, entre Φ et F_2 d'autre part, nous avons des correspondances (1, 2) et par conséquent, entre F_1, F_2, une correspondance (2, 2), deux points homologues ayant pour correspondant un même point de Φ. Désignons par F une surface qui représente les couples de points homologues dans cette correspondance entre F_1 et F_2.

La surface F contient deux involutions du second ordre I'_2, I''_2 ayant respectivement pour images les surfaces F_1, F_2. Soient T', T'' les transformations birationnelles involutives de F en soi, génératrices des involutions I'_2, I''_2. A un point de Φ correspondent quatre points de F se répartissant en deux groupes de I'_2 et en deux groupes de I''_2. La transformation $T = T'T''$ transforme le groupe de quatre points en lui-même et est nécessairement involutive. Elle engendre une involution du second ordre I_2 dont nous désignerons une surface image par F_0.

La surface F_0 contient à son tour une involution du second ordre J_2, ayant pour image la surface Φ.

Désignons par A_{ik} la courbe qui correspond, sur F, à la droite a_{ik} et par B_{ik} celle qui correspond à la droite b_{ik}. L'involution I_2' a pour courbe unie les 16 courbes B_{ik} et l'involution I_2'', les 16 courbes A_{ik}. Par conséquent, l'involution I_2 a pour points unis les points communs aux courbes A_{ik}, B_{ik}, c'est-à-dire 160 points.

Sur la surface F_0, l'involution J_2 a pour courbes unies les courbes A'_{ik}, B'_{ik} qui correspondent respectivement aux courbes A_{ik}, B_{ik}.

3. Envisageons la correspondance (1, 2) entre les surfaces Φ et F_0. Une courbe canonique de F_0 est équivalente, d'après un théorème de M. Enriques, à la transformée d'une courbe canonique de Φ, augmentée de la courbe unie. Or, Φ possède une courbe canonique d'ordre zéro, par conséquent, le système canonique de F_0 est défini par

$$|K_0| = |\Sigma A'_{ik} + \Sigma B'_{ik}|, \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4).$$

A la section de Φ par une surface du quatrième ordre correspond sur F_0 une courbe canonique. On en conclut que le genre linéaire de F_0 a pour valeur $p^{(1)} = 129$.

Les courbes $4\Gamma_0$, découpées sur Φ par les surfaces du quatrième ordre, forment un système linéaire $|4\Gamma_0|$ de dimension 33. Le transformé de ce système sur F_0 nous donne donc 34 courbes canoniques linéairement indépendantes de cette surface. Nous avons en outre la courbe canonique formée des courbes A', B'. On en conclut que le genre géométrique de F_0 est $p_g \geqslant 35$. D'autre part, la courbe unie de l'involution J_2 étant une courbe totale du système canonique $|K_0|$, celui-ci ne peut contenir qu'un système appartenant à l'involution (en dehors de la courbe unie) ; on a donc $p_g = 35$.

En appliquant à la correspondance entre Φ et F_0 la formule de M. Severi [1] liant les genres arithmétiques des deux surfaces, on trouve, pour le genre arithmétique de F_0, $p_a = 35$. La surface F_0 est donc régulière.

Nous prendrons, comme modèle projectif de F_0, la surface de l'espace S_{34}, d'ordre 128, dont les sections hyperplanes sont les courbes canoniques K_0. Sur cette surface, les courbes A'_{ik}, B'_{ik} sont des quartiques rationnelles.

4. Considérons maintenant la correspondance (1, 2) entre les surfaces F_0 et F. Comme nous l'avons vu, cette correspondance possède 160 points de diramation sur F_0 ; ce sont les points communs aux courbes A'_{ik}, B'_{ik}.

Soient P un de ces points, P' le point correspondant sur Φ. Aux courbes du système $|4\Gamma_0|$ passant par P' correspondent des courbes K_0 ayant un point double en P. La courbe unie de J_2 a également un point double en P, par conséquent toutes les courbes canoniques de F_0 passant par P ont un point double en P. Il en résulte que sur le modèle projectif (canonique) de F_0 que nous avons choisi, dans S_{34}, P est un point double conique. C'est ce modèle projectif qui sera dorénavant désigné par F_0 ; il possède donc 160 points doubles coniques, points de diramation pour la correspondance (1, 2) entre les surfaces F_0 et F.

D'après la théorie des involutions du second ordre n'ayant qu'un nombre fini de points unis [2], le genre arithmétique de F est $p_a = 31$.

[1] *Sulle relazioni che legano i caratteri invarianti di due superficie in corrispondenza algebrica* (Rend. R. Ist. Lombardo, 1903, pp. 495-511).

[2] Voir notre *Mémoire sur les surfaces algébriques doubles ayant un nombre fini de points de diramation* (ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE, 1914, pp. 289-312) et notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Paris, Hermann, 1935). La formule utilisée pourrait aussi être déduite de celle de M. Severi citée plus haut.

Aux courbes canoniques K_0 de F_0 correspondent des courbes canoniques K de F. La dimension du système canonique $|K|$ de F est au moins égale à 34 ; supposons qu'elle soit égale à $r > 34$. Il existe alors, dans $|K|$, un système linéaire partiel, de dimension r-35, appartenant à l'involution I_2 et dont les courbes passent simplement par les points unis de cette involution, c'est-à-dire par les 160 points communs aux courbes A_{ik}, B_{ik}.

Sur Φ, une courbe $4\Gamma_0$ coupe a_{11} en quatre points, donc les courbes K_0, sur F_0, coupent A'_{11} en quatre points et sur F, les courbes K coupent A_{11} en huit points. Une courbe K devant passer par les dix points unis de I_2 appartenant à A_{11} devrait donc comprendre cette courbe comme partie. Pour la même raison, elle comprendrait comme parties les autres courbes A_{ik} et les courbes B_{ik}. Il ne peut donc exister de courbes canoniques K de F passant simplement par les points unis de I_2 et par conséquent $|K|$ a la dimension 34. Le genre géométrique de F est $p_g = 35$ et la surface a l'irrégularité $q = p_g - p_a = 4$.

Le genre linéaire de F est égal à $p^{(1)} = 257$.

Les courbes A_{ik}, B_{ik} ont le genre quatre.

5. Pour obtenir un modèle projectif irréductible de F, considérons son système bicanonique. Le bigenre de F vaut $P_2 = p_a + p^{(1)} = 288$. D'autre part, le bigenre de la surface F_0 vaut $P_2 = 164$. Il en résulte que le système bicanonique $|2K|$ de F ne peut appartenir à l'involution I_2.

En rapportant projectivement les courbes de $|2K|$ aux hyperplans d'un espace linéaire S_{287}, nous obtiendrons donc un modèle projectif simple de la surface F. Ce sera une surface d'ordre 1024, à sections hyperplanes de genre 769. Sur cette surface, les courbes A_{ik}, B_{ik}, de genre quatre, seront d'ordre 16.

Sur ce modèle bicanonique de F, l'involution I_2 sera engendrée par une homographie harmonique ayant comme axes un espace S_{123} ne rencontrant pas la surface et un espace S_{163} coupant F aux 160 points unis de l'involution. Aux courbes découpées sur F par les hyperplans passant par le second axe S_{163} correspondront sur F_0 des courbes de genre 345, passant par les 160 points doubles de F_0. Si l'on représente ces courbes par D et si $\varDelta$ est la somme des courbes rationnelles de degré -2, infiniment petites, équivalentes aux 160 points de diramation de F_0, on aura sur cette surface

$$4K_0 \equiv 2D + \varDelta.$$

Cela signifie que le long d'une courbe D, il y a une hypersurface du quatrième ordre inscrite dans la surface F_0.

6. Terminons par une brève remarque.

Considérons une surface algébrique régulière $\varPsi$, de genre arithmétique p_a, image d'une involution du second ordre, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique $\varPsi'$. La surface $\varPsi$ possède un certain nombre, multiple de quatre, 4ϵ, de points de diramation. On peut choisir, comme modèle projectif de $\varPsi$, une surface normale sur laquelle les points de diramation soient des points doubles coniques. Si p'_a désigne le genre arithmétique de $\varPsi'$, on a

$$12(p'_a + 1) = 24(p_a + 1) - 3.4\epsilon.$$

Le genre géométrique p'_g de $\varPsi'$ est certainement au moins égal à celui de $p_g = p_a$ de la surface régulière $\varPsi$. Si donc on a $p'_a < p_a$, la surface $\varPsi'$ sera irrégulière. Cette condition se traduit par

$$\epsilon > p_a + 1.$$

C'est ce qui se présente lorsque la surface $\varPsi$ coïncide avec la surface F_0 dont il est question plus haut. On a alors $p_a = 35$, $\epsilon = 40$. C'est ce qui se présente également lorsque Ψ est une surface de Kummer généralisée ; on a alors $p_a = 1$, $\epsilon = 4$ et la surface Ψ est une surface de Picard ($p'_a = -1$). Enfin, c'est ce qui se présente encore quand la surface Φ est une surface de Humbert, représentant les couples de points d'une courbe de genre trois de telle sorte que deux couples formant un groupe canonique de la courbe corresponde à un seul point de la surface ; on a $p_a = 3$, $\epsilon = 7$ et Ψ représente une involution d'ordre deux appartenant à une surface représentant les couples de points de la courbe de genre trois ($p'_a = 0$).

Outre la condition d'existence des 4ϵ points doubles coniques, la surface Ψ doit également posséder une courbe le long de laquelle une surface d'ordre pair lui est inscrite.

Liége, le 30 octobre 1944.