Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences).
Séance du 7 octobre 1944.

GÉOMÉTRIE

Remarque sur le contact des surfaces,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Dans cette courte note, nous considérons deux surfaces algébriques ayant, en tout point d'intersection, un contact d'ordre $p - 1$, la courbe de contact étant d'ailleurs dépourvue de points singuliers. Nous montrons que l'une des surfaces au moins possède des points singuliers sur la courbe de contact. Nous montrons ensuite que ce point singulier est en général un point double, conique si le contact est ordinaire ($p = 2$), biplanaire si le contact est d'ordre supérieur. D'une manière précise, le point singulier est alors un point double biplanaire auquel sont infiniment voisins successifs un certain nombre de points doubles biplanaires suivis d'un point double conique si p est pair, d'un point double biplanaire ordinaire si p est impair.

Le point singulier en question peut éventuellement être d'une multiplicité supérieure à deux; nous considérons brièvement cette hypothèse.

1. Soient F_1, F_2 deux surfaces algébriques d'ordres n_1, n_2. Supposons que le produit $n_1 n_2$ soit multiple d'un certain entier positif p et posons $n_1 n_2 = p\nu$. Nous ferons l'hypothèse que les surfaces F_1, F_2 ont un contact d'ordre $p - 1$ le long d'une courbe D d'ordre ν, cette courbe étant d'ailleurs dépourvue de points singuliers.

Nous commencerons par établir que l'une au moins des surfaces F_1, F_2 a des points singuliers sur la courbe D.

Supposons en premier lieu que les surfaces F_1, F_2 aient le même ordre $n = n_1 = n_2$. Elles déterminent un faisceau de surfaces d'ordre n se raccordant deux à deux le long de la courbe D. Il existe une surface de ce faisceau touchant en un point P de D une droite non tangente en ce point aux surfaces du faisceau ; cette surface a un point au moins double en P et nous pouvons, en changeant de notation, la prendre pour surface F_2. Nous admettrons donc que la surface F_2 a au moins un point singulier sur la courbe D.

La première polaire d'un point quelconque M par rapport à F_2 passe par les points singuliers de cette surface et coupe encore la courbe D en un certain nombre $\delta < \nu(n-1)$ de points, simples pour F_2. La développable Δ, lieu des plans tangents aux surfaces F_1, F_2 le long de la courbe D est de classe δ.

La première polaire du point M par rapport à F_1 coupe la courbe D en $\nu(n-1)$ points parmi lesquels se trouvent les δ points de contact avec F_1 des plans de Δ passant par M. En un des $\nu(n-1)-\delta$ autres points, le plan tangent à F_1 doit être indéterminé et la surface F_1 possède donc un certain nombre de points singuliers sur la courbe D.

On voit que toute surface du faisceau déterminé par F_1, F_2 possède un certain nombre de points singuliers sur la courbe D, ces points absorbant $\nu(n-1)-\delta$ points parmi les intersections de D et des premières polaires des surfaces du faisceau.

Supposons maintenant $n_2 < n_1$. Le raisonnement qui vient d'être fait peut être repris avec de légères modifications. En considérant les premières polaires par rapport à F_2, on voit que la classe δ de la développable Δ engendrée par les plans tangents à F_1, F_2 le long de la courbe D est au plus égale à $\nu(n_2-1)$. Sur la courbe D, la surface

F_1 possède des points singuliers absorbant $\nu(n_1 - 1) - \delta$ des intersections de D avec les premières polaires de F_1. On a

$$\delta \leqslant \nu(n_2 - 1),$$

donc

$$\nu(n_1 - 1) - \delta \geqslant \nu(n_1 - n_2) > 0.$$

Ainsi donc, il y a au moins une des surfaces F_1, F_2 qui possède des points singuliers sur la courbe D.

2. Soit P un point de la courbe D, singulier pour la surface F_1. Ce point est nécessairement simple pour la surface F_2, puisque par hypothèse D est dépourvue de points singuliers.

En P, d'après ce qui précède, le plan tangent à la surface F_1 doit être indéterminé et il suffit pour cela que P soit double pour la surface.

Supposons donc P double pour la surface F_1. Une courbe γ, tracée sur la surface F_2 et passant par P, doit rencontrer F_1 en p points confondus en P. Si $p = 2$, ce résultat est obtenu si P est double conique pour F_1. Si $p > 2$, la courbe γ doit toucher F_1 en P et par conséquent le plan tangent à F_2 en P doit appartenir au cône tangent à F_1 en ce point. Le point P est donc double biplanaire pour F_1 et un des plans tangents coïncide avec le plan tangent à F_2 en P. Si $p = 3$, cette condition est suffisante pour que la courbe γ coupe F_1 en trois points confondus en P.

Supposons $p > 3$.

Rapportons les surfaces F_1, F_2 à un trièdre de référence dont l'origine est le point P et choisi de telle sorte que les équations de F_1, F_2 s'écrivent

$$xy + \phi_3(x, y, z) + \phi_4(x, y, z) + \ldots = 0,$$

$$y + \psi_2(x, y, z) + \psi_3(x, y, z) + \ldots = 0,$$

les ϕ et les ψ étant des formes algébriques dont le degré est indiqué par l'indice.

Opérons la transformation quadratique

$$\begin{pmatrix} xz & yz & z \\ x & y & z \end{pmatrix},$$

qui fait correspondre au point infiniment voisin de P sur l'axe des z la nouvelle origine.

Les équations des transformées F_1', F_2' de F_1, F_2 s'écrivent

$$xy + z\phi_3(x, y, 1) + z^2\phi_4(x, y, 1) + \dots = 0,$$
$$y + z\psi_2(x, y, 1) + z^2\psi_3(x, y, 1) + \dots = 0.$$

A une courbe γ, tangente en P à l'axe des z, correspond une courbe γ' passant par l'origine, tracée sur F_2' et rencontrant F_1' en $p - 2$ points confondus en O. Puisque $p > 3$, le plan tangent $y = 0$, à F_2' en O doit donc coïncider avec le plan tangent à F_1' au même point, ou bien ce point doit être double pour F_1'. On voit immédiatement que c'est la seconde alternative qui se présente, c'est-à-dire que l'on a

$$\phi_3(0, 0, 1) \equiv 0.$$

La courbe γ' rencontre alors F_1' en deux points confondus en O. Si $p = 4$, cette condition est suffisante pour notre objet et la surface F_1 possède en P un point double biplanaire auquel est infiniment voisin un point double conique.

Si $p > 4$, le plan tangent à F_2' en O doit appartenir au cône tangent en ce point à F_1' et le raisonnement précédent peut être repris. On en conclut l'énoncé suivant :

Si deux surfaces algébriques ont entre elles un contact d'ordre p — 1 *en tout point d'intersection, la courbe de* *contact étant dépourvue de points singuliers, l'une au moins des surfaces possède des points singuliers sur cette courbe. Un tel point singulier est un point double auquel sont infiniment voisins successifs* $\frac{1}{2}(\mathrm{p}-1)$ *points doubles biplanaires dont le dernier est ordinaire si* p *est impair,* $\frac{1}{2}\mathrm{p}$ *points doubles dont le dernier est conique si* p *est pair, ou c'est un point de multiplicité supérieure à deux.*

3. Le cas où le point P est double pour la surface F_1 est en quelque sorte la singularité minimum nécessaire pour que le contact d'ordre $p-1$ des deux surfaces soit réalisé. Le point P peut évidemment présenter une multiplicité d'ordre supérieur.

Tout d'abord, si le point P est multiple d'ordre p pour la surface F_1, la courbe γ tracée sur F_2 rencontre F_1 en p points confondus en P et la condition requise est réalisée.

Supposons que le point P soit multiple d'ordre $q<p$ pour la surface F_1. Les courbes γ tracées sur F_2 et passant par P devant rencontrer F_1 en p points confondus en P, le plan tangent à F_2 en P doit appartenir au cône tangent à F_1 en ce point.

En prenant P comme origine des coordonnées, l'équation de F_1 peut s'écrire sous la forme

$$y[z^{q-2}\rho_1(x,y)+z^{q-3}\rho_2(x,y)+\ldots+\rho_{q-1}(x,y)] \\ +\phi_{q+1}(x,y,z)+\phi_{q+2}(x,y,z)+\ldots=0,$$

où les ρ sont des formes algébriques en x, y dont le degré est indiqué par l'indice.

Effectuons la transformation quadratique déjà utilisée plus haut ; nous obtenons une surface F_1' d'équation

$$y[\rho_1(x,y)+\rho_2(x,y)+\ldots+\rho_{q-1}(x,y)] \\ +z\phi_{q+1}(x,y,1)+z^2\phi_{q+2}(x,y,1)+\ldots=0.$$

La courbe γ', transformée d'une courbe γ tangente en P à l'axe des z, passe par la nouvelle origine O et doit rencontrer F'_1 en $p-q$ points confondus en O. Si $p > q+1$ le point O doit être multiple pour la surface F'_1 ; soit q' cette multiplicité. Si

$$p - q - q' > 0,$$

le plan tangent en O à la surface F'_2 doit appartenir au cône tangent à F'_1 en O. Et ainsi de suite.

Liége, le 15 septembre 1944.