EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liège*,
Séance du 19 octobre 1944. — N^os 8 à 10.

Sur les involutions cycliques appartenant à une variété algébrique de genres un,

par LUCIEN GODEAUX, Membre de la Société.

Dans une courte note publiée sous le même titre [1], nous avons considéré une involution cyclique du cinquième ordre appartenant à une variété à trois dimensions et du cinquième ordre, de l'espace à quatre dimensions, et présentant dix points unis. Notre but était de montrer que l'on peut ainsi démontrer l'existence de variétés à trois dimensions sur lesquelles l'opération d'adjonction a la période cinq. Nous avons cru ce but atteint; un examen plus approfondi de la question nous a

[1] *Bull. Acad. roy. de Belgique*, 1937, pp. 680-684.

montré que l'exemple construit ne possède pas la propriété en question.

Le procédé utilisé était le suivant : Considérons, sur la variété V, hypersurface du cinquième ordre d'un espace linéaire à quatre dimensions, une involution I_5 d'ordre cinq engendrée par une homographie de période cinq, possédant comme axes ponctuels deux droites et un point. On suppose V choisie de manière que l'involution I_5 ne possède qu'un nombre fini de points unis, précisément dix. On construit alors sur V un système linéaire de surfaces $|F|$ qui contient cinq systèmes linéaires partiels $|F_1|$, $|F_2|$, ..., $|F_5|$, appartenant à l'involution I_5, dont le premier soit dépourvu de points-base. Soient Ω une variété image de l'involution I_5 et $|\Phi_1|$, $|\Phi_2|$, ..., $|\Phi_5|$ les systèmes linéaires de surfaces qui correspondent, sur Ω, aux systèmes $|F_1|$, $|F_2|$, ..., $|F_5|$.

Du fait que $|F|$ est son propre adjoint, on déduit que les systèmes $|\Phi_1|$, $|\Phi_2|$, ..., $|\Phi_5|$ sont adjoints les uns des autres.

Écrivons les équations de l'homographie génératrice de I_5 sous la forme

$$x'_0 : x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_0 \quad x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon x_3 : \varepsilon^{\alpha} x ,$$

ε étant une racine primitive de l'unité et α un entier compris entre 2 et 4. Si $\alpha=3$, chacun des systèmes $|\Phi_1|$, $|\Phi_2|$, ..., $|\Phi_5|$ est son propre adjoint. Si $\alpha=2$ ou $\alpha=4$, on est conduit à la même involution, aux notations près. Nous considérons le cas $\alpha=2$.

On établit que le système $|\Phi_1|$ a pour adjoint le système $|\Phi_2|$, puis que les adjointes aux systèmes $|\Phi_2|$, $|\Phi_3|$, $|\Phi_4|$, $|\Phi_5|$ appartiennent aux systèmes respectifs $|\Phi_3|$, $|\Phi_4|$, $|\Phi_5|$, $|\Phi_1|$, à des composantes des points de diramation de la variété Ω près. Les points de diramation de Ω sont, en effet, multiples pour cette variété et équivalents, au point de vue des transformations birationnelles, à des groupes de surfaces rationnelles; celles-ci interviennent comme composantes des systèmes adjoints précédents (2).

En établissant ensuite que le système adjoint à $|\Phi_5|$ n'est pas le système $|\Phi_1|$, mais un système linéaire compris partiellement dans $|\Phi_1|$, on voit que l'opération d'adjonction sur Ω n'a pas la période cinq. Les surfaces canonique et pluricanoniques de Ω n'existent pas (3).

---

(2) Voir sur cet objet notre note sur : Un problème sur les variétés algébriques (*Revue scientifique*, 1942, pp. 6-9).

(3) Nous utiliserons dans cette note des propriétés des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique; on trouvera un résumé

1. Considérons, dans l'espace S_4 à quatre dimensions, l'homographie

$$x'_0 : x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_0 : x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon x_3 : \varepsilon^2 x_4, \qquad \text{(H)}$$

où ε est une racine primitive cinquième de l'unité.

L'homographie H a la période cinq et possède trois axes ponctuels :

a) La droite s_1 $(x_2 = x_3 = x_4 = 0)$;

b) La droite s_2 $(x_0 = x_1 = x_4 = 0)$;

c) Le point O_4 (0, 0, 0, 0, 1).

La variété V_3^5, à trois dimensions et d'ordre cinq, la plus générale, ne contenant aucun des axes de H et transformée en elle-même par cette homographie, a pour équation

$$x_4^5 + x_4^2 \alpha_2(x_0, x_1)\beta_1(x_2, x_3) + x_4 \alpha_1 \beta_3 + \alpha_5(x_0, x_1) + \beta_5(x_2, x_3) = 0,$$

où $\alpha_i(x_0, x_1)$ est une forme algébrique en x_0, x_1 dont le degré est indiqué par l'indice, $\beta_k(x_2, x_3)$ une forme en x_2, x_3 de degré k, le produit symbolique $\alpha_i(x_0, x_1).\beta_k(x_2, x_3)$ représentant une forme à deux séries de variables de degré i en x_0, x_1, de degré k en x_2, x_3.

Sur la variété V_3^5, l'homographie H engendre une involution I_5, d'ordre cinq, dont nous désignerons par Ω une variété image. L'involution I_5 possède dix points unis : cinq points $A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{15}$ sur la droite s_1 et cinq points $A_{21}, A_{22}, \ldots, A_{25}$ sur la droite s_2.

La variété V_3^5, que nous désignerons plus simplement par V, est complètement régulière et possède une surface canonique et des surfaces pluricanoniques d'ordre zéro. Tout système linéaire de surfaces tracées sur V est son propre adjoint.

2. Désignons par F les sections de V par les hypersurfaces du cinquième ordre de S_4. Celles-ci sont en nombre ∞^{125} et, par conséquent, le système $|F|$ a la dimension 124. Le système $|F|$ étant son propre adjoint, les surfaces F ont les genres

$$p_a = p_g = 124, \quad p^{(1)} = 5^4 + 1.$$

Dans le système des hypersurfaces du cinquième ordre de S_4,

---

de ces propriétés et la bibliographie de la question dans notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Paris, Hermann, 1935).

il y a cinq systèmes d'hypersurfaces transformées en elles-mêmes par H; ils ont pour équations

$$x_4^5 + x_4^2\lambda_2(x_0, x_1)\,\mu_1(x_2, x_3) + x_4\lambda_1\mu_3 + \lambda_5(x_0, x_1) + \mu_5(x_2, x_3) = 0,$$
$$x_4^3\lambda_2(x_0, x_1) + x_4^2\lambda_1(x_0, x_1)\,\mu_2(x_2, x_3) + x_4\mu_4 + \lambda_4\mu_1 = 0,$$
$$x_4^3\lambda_1\mu_1 + x_4^2\mu_3 + x_4\lambda_4 + \lambda_3\mu_2 = 0,$$
$$x_4^4\lambda_1 + x_4^3\mu_2 + x_4\lambda_3\mu_1 + \lambda_2\mu_3 = 0,$$
$$x_4^4\mu_1 + x_4^2\lambda_3 + x_4\lambda_2\mu_2 + \lambda_1\mu_4 = 0.$$

La variété V appartient au premier de ces systèmes. Nous désignerons par F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 les surfaces F découpées sur V respectivement par les systèmes précédents. Le système $|F|$ contient donc cinq systèmes linéaires partiels $|F_1|$, $|F_2|$, $|F_3|$, $|F_4|$, $|F_5|$ appartenant à l'involution I_5. Ils ont respectivement pour dimensions 25, 23, 24, 24 et 24.

Le système $|F_1|$ est dépourvu de points-base, les autres ont pour points-base les dix points unis de I_5.

Soient Φ_1, Φ_2, ..., Φ_5 les surfaces qui correspondent sur Ω respectivement aux surfaces F_1, F_2, ..., F_5. Les systèmes $|\Phi_1|$, $|\Phi_2|$, ..., $|\Phi_5|$ sont complets et nous prendrons, pour modèle projectif de Ω, la variété d'ordre 5^3, de S_{25}, qui a pour sections hyperplanes les surfaces Φ_1.

Considérons une surface F_1 déterminée, soit F_1^* et la surface Φ_1^* correspondante. La surface Φ_1^* représente une involution d'ordre cinq, cyclique, privée de points unis, appartenant à F_1^*. Par conséquent, le système canonique de Φ_1^* a pour transformé sur F_1^* celui des systèmes partiels composés au moyen de I_5, appartenant au système canonique, qui a la plus petite dimension ([4]). Les systèmes découpés sur F_1^* par les systèmes $|F_1|$, $|F_3|$, $|F_4|$, $|F_5|$ ont tous la dimension 24. Le système $|(F_1^*, F_2)|$, découpé par $|F_2|$, a la dimension 23. On en conclut que le système canonique de Φ_1^* est le système $|(\Phi_1^*, \Phi_2)|$. Par conséquent, les surfaces Φ_1 ont le genre arithmétique $p_a = 24$.

Aux points unis de I_5 sur V correspondent sur Ω des points de diramation isolés qui sont multiples pour Ω. Chacun de ces points est équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à un ensemble de surfaces rationnelles.

([4]) Sur les involutions cycliques dépourvues de points unis appartenant à une surface algébrique régulière (*Bull. Acad. roy. de Belgique*, 1932, pp. 672-679).

D'après ce qu'on vient d'établir, les surfaces Φ_2 découpent, sur une surface Φ_1, le système canonique de cette surface. Cependant, l'adjoint de $|\Phi_1|$ n'est pas nécessairement le système $|\Phi_2|$, mais peut être ce système augmenté éventuellement de composantes des points de diramation de Ω. Nous écrirons cependant

$$\Phi_1' \equiv \Phi_2,$$

en sous-entendant que cette équivalence a lieu à des composantes des points de diramation près.

Observons encore que les genres arithmétiques de Φ_1^*, F_1^* vérifient bien la relation que nous avons établie autrefois entre ces quantités [5].

3. Nous allons maintenant étudier la structure des points unis de l'involution I_5 sur la variété V.

Les points $A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{15}$ ont évidemment même structure et il suffira d'étudier l'un d'eux. Dans ce but, en déplaçant éventuellement la figure de référence, nous pouvons supposer que le point A_{11}, par exemple, coïncide avec $O_0(1, 0, 0, 0, 0)$. Il suffira de supposer que l'on a $\alpha_5(1, 0)=0$.

L'hyperplan tangent en O_0 à la variété V est $x_1=0$ et dans cet espace, H détermine l'homographie

$$x_0' : x_2' : x_3' : x_4' = x_0 : \varepsilon x_2 : \varepsilon x_3 : \varepsilon^2 x_4.$$

Pour notre objet, nous devons étudier cette homographie dans la gerbe de sommet O_0. Dans cette gerbe, nous avons une homologie d'axe $x_2=x_3=0$ et de plan $x_4=0$.

Effectuons la transformation

$$\begin{pmatrix} y_0^2 & y_2y_4 & y_3y_4 & y_0y_4 \\ x_0 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

dont l'inverse est

$$\begin{pmatrix} x_0x_4 & x_0x_2 & x_0x_3 & x_4^2 \\ y_0 & y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix}.$$

Cette transformation fait correspondre au point infiniment voisin de O_0 sur la droite $x_2=x_3=0$, le point $y_2=y_3=y_4=0$.

A l'homographie H correspond l'homographie

$$y_0' : y_2' : y_3' : y_4' = \varepsilon y_0 : y_2 : y_3 : \varepsilon^3 y_4.$$

---

(5) Recherches sur les involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à une surface algébrique (*Bull. Soc. Math. de France*, 1919, pp. 1-16).

Le point infiniment voisin de $O'_0(1, 0, 0, 0)$ sur la droite $y_2=y_3=0$ est uni. Effectuons une nouvelle fois la transformation; nous obtenons l'homographie

$$y_0 : y_2 : y'_3 : y'_4 = y_0 \quad \varepsilon^2 y_2 : \varepsilon^2 y_3 : \varepsilon^2 y_4.$$

Cette homographie est donc une homologie de centre $O''_0(1, 0, 0, 0)$.

Nous voyons donc qu'au point O_0 sont infiniment voisins successifs deux points unis de I_5 dont le premier est situé sur la droite $x_2=x_3=0$ et dont le second est uni parfait.

Effectuons maintenant la transformation

$$\begin{pmatrix} y_2y_3 & y_0y_2 & y_0y_3 & y_0y_4 \\ x_0 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

dont l'inverse est

$$\begin{pmatrix} x_2x_3 & x_0x_2 & x_0x_3 & x_0x_4 \\ y_0 & y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix}$$

et qui fait correspondre aux points infiniment voisins de O_0 dans le plan $x_4=0$, ceux de la droite $y_0=y_4=0$. A l'homographie H correspond l'homographie

$$y'_0 : y'_2 : y'_3 : y'_4 = \varepsilon y_0 : y_2 : y_3 : \varepsilon y_4,$$

qui possède la droite $y_0=y_4=0$ comme axe ponctuel.

Pour préciser, considérons le plan $x_3=\lambda x_2$, uni pour l'homographie H.

Opérons dans ce plan la transformation

$$\begin{pmatrix} y_0^2 & y_0y_2 & y_2y_4 \\ x_0 & x_2 & x_4 \end{pmatrix},$$

dont l'inverse est

$$\begin{pmatrix} x_0x_2 & x_2^2 & x_0x_4 \\ y_0 & y_2 & y_4 \end{pmatrix}$$

et qui fait correspondre au point infiniment voisin de O_0 sur $x_4=0$ le point $y_2=y_4=0$. A l'homographie déterminée par H dans le plan considéré correspond l'homologie

$$y'_0 : y'_2 : y'_4 = y_0 : \varepsilon y_2 : \varepsilon y_4.$$

On voit donc qu'au point O_0 est infiniment voisine dans le plan $x_4=0$ une droite dont tous les points sont unis parfaits.

4. Les points unis $A_{21}, A_{22}, \ldots, A_{25}$ ont même structure; nous étudierons l'un d'eux en supposant qu'il coïncide avec

$O_2(0, 0, 1, 0, 0)$. Cela revient à supposer que dans l'équation de V, on a $\beta_5(1, 0)=0$.

L'hyperplan tangent à V en O_2 est $x_3=0$. Dans cet espace, H détermine l'homographie

$$x'_0 : x'_1 : x'_2 : x'_4 = x_0 : x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^2 x_4.$$

Effectuons la transformation

$$\begin{pmatrix} y_2^2 & y_0 y_4 & y_1 y_4 & y_2 y_4 \\ x_2 & x_0 & x_1 & x_4 \end{pmatrix},$$

dont l'inverse est

$$\begin{pmatrix} x_2 x_4 & x_0 x_2 & x_1 x_2 & x_4^2 \\ y_2 & y_0 & y_1 & x_4 \end{pmatrix}$$

et qui fait correspondre au point infiniment voisin de O_2 le point $y_0=y_1=y_4=0$. A l'homographie correspond l'homographie

$$y'_2 : y'_0 : y'_1 : y'_4 = \varepsilon^2 y_2 : y_0 : y_1 : \varepsilon^3 y_1.$$

Effectuons encore deux fois de suite la même transformation; nous obtenons les homographies

$$y'_2 : y'_0 : y'_1 : y'_4 = y_2 : \varepsilon^2 y_0 : \varepsilon^2 y_1 : \varepsilon y_4,$$
$$y'_2 : y'_0 : y'_1 : y'_4 = y_2 : \varepsilon y_0 : \varepsilon y_1 : \varepsilon y_4,$$

dont la dernière est une homologie.

On en conclut qu'au point O_2 sont infiniment voisins successifs trois points unis dont le premier est $x_0=x_1=0$ et dont le dernier est parfait.

Considérons maintenant le plan uni $x_1=\lambda x_0$ et effectuons dans ce plan la transformation

$$\begin{pmatrix} y_2^2 & y_0 y_2 & y_0 y_4 \\ x_2 & x_0 & x_4 \end{pmatrix},$$

dont l'inverse est

$$\begin{pmatrix} x_0 x_2 & x_0^2 & x_2 x_4 \\ y_2 & y_0 & y_4 \end{pmatrix};$$

elle fait correspondre au point infiniment voisin de O_2 sur $x_4=0$ le point $(1, 0, 0)$. A l'homographie déterminée par H dans le plan considéré correspond l'homographie

$$y'_2 : y'_0 : y'_4 = \varepsilon y_2 : y_0 : \varepsilon^3 y_4.$$

En effectuant encore deux fois de suite la transformation précédente, on obtient les homographies

$$y_2' : y_0' : y_4' = \varepsilon y_2 : y_0 : \varepsilon^4 y_4,$$

$$y_2' : y_0' : y_4' = \varepsilon y_2 : y_1 : y_4,$$

dont la dernière est une homologie.

Au point O_2 sont infiniment voisines successives trois droites dont la première dans le plan $x_4 = 0$ et dont tous les points de la dernière sont unis parfaits.

5. Nous avons établi que l'adjoint du système $|\Phi_1|$ est le système $|\Phi_2|$. Considérons le système $|2F|$, découpé sur V par les hypersurfaces d'ordre dix. Le système $|2F|$ contient cinq systèmes linéaires appartenant à l'involution I_5. On reconnaît immédiatement que celui de ces systèmes qui est dépourvu de points-base contient les surfaces $2F_1$, $F_2 + F_5$, $F_3 + F_4$. On en conclut que sur la variété Ω, on a, *à des composantes des points de diramation près*,

$$2\,\Phi_1 \equiv \Phi_2 + \Phi_5.$$

On a, par conséquent,

$$\Phi_1' + \Phi_1 \equiv \Phi_2 + \Phi_5';$$

donc, à ces composantes des points de diramation près,

$$|\Phi_5'| = |\Phi_1|.$$

Le même procédé conduit aux équivalences

$$2\,\Phi_5 \equiv \Phi_1 + \Phi_4, \quad 2\,\Phi_4 \equiv \Phi_3 + \Phi_5, \quad 2\,\Phi_3 \equiv \Phi_2 + \Phi_4,$$

d'où l'on déduit

$$|\Phi_4'| = |\Phi_5|, \quad |\Phi_3'| = |\Phi_4|, \quad |\Phi_2'| = |\Phi_3|.$$

Ces équivalences signifient que les surfaces adjointes au système $|\Phi_i|$ appartiennent au système $|\Phi_{i+1}|$ augmenté de certaines combinaisons des composantes des points de diramation. Cependant, il peut arriver que les adjoints de $|\Phi_i|$ appartiennent au système $|\Phi_{i+1}|$, mais qu'inversement, une surface Φ_{i+1} ne soit pas en général une adjointe de $|\Phi_i|$.

Deux cas peuvent se présenter :

1° Le système $|\Phi_i'|$ coïncide avec le système $|\Phi_{i+1}|$, à des composantes des points de diramation près. On a alors

$$|\Phi_1^{\mathrm{v}}| = |\Phi_1|,$$

à des composantes des points de diramation près. La variété Ω possède une surface cinq-canonique d'ordre zéro, qui se réduit aux composantes en question.

2° Il existe au moins un des systèmes $|\Phi_i'|$ qui est compris dans le système $|\Phi_{i+1}|$, mais ne coïncide pas avec ce système. Le raisonnement qui vient d'être fait n'est plus valable et la variété Ω ne possède pas de surface cinq-canonique.

On va voir que c'est ce dernier cas qui se présente actuellement.

6. Considérons les surfaces F_5 et examinons leur comportement aux points unis de I_5.

Au point O_0, la variété qui découpe une surface F_5 sur V a un point double uniplanaire, l'hyperplan tangent étant $x_4=0$. Une surface F_5 a donc en O_0 un point double uniplanaire, le plan tangent étant $x_1=x_4=0$.

Dans l'hyperplan $x_1=0$, tangent à V en O_0, effectuons la transformation

$$\begin{pmatrix} y_2y_3 & y_0y_2 & y_0y_3 & y_0y_4 \\ x_0 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

qui fait correspondre aux points infiniment voisins de O_0 dans le plan $x_4=0$ la droite $y_0=y_4=0$.

Nous obtenons la surface

$$y_0^3y_4^4\mu_1(y_2, y_3) + y_2^3y_3^3y_4^2\lambda_3(1,0) + y_0y_2^2y_3^2y_4\lambda_2(1,0)\mu_2(y_2, y_3) + \\ + y_0^2y_2y_3\lambda_1(1,0)\mu_4(y_2, y_3) = 0.$$

La droite $y_0=y_4=0$ est double pour cette surface; par conséquent, les surfaces F_5 ont un tacnode en O_0.

On peut d'ailleurs arriver à cette conclusion d'une autre manière. Considérons une surface F_2. Elle a un point simple en O_0 et son plan tangent en ce point est $x_1=0$, $\mu_1(x_2, x_3)=0$. D'après la structure du point O_0, l'involution déterminée par I_5 sur une surface F_2 possède en O_0 un point uni auquel est infiniment voisin un point uni parfait sur la droite $\mu_1(x_2, x_3)=0$, $x_1=0$. Il en résulte qu'une surface F_1 passant par O_0 coupe une surface F_2 suivant une courbe ayant un point triple en O_0 et un point double infiniment voisin sur la droite $\mu_1=0$, $x_4=0$. L'autre tangente à cette courbe en O_0 coïncide avec la droite $x_2=x_3=0$. Par conséquent, les surfaces F_1 passant par O_0 ont un point triple en ce point, deux plans tangents coïncidant avec $x_1=x_4=0$, le troisième plan tangent passant par la droite $x_1=x_2=x_3=0$. De plus, la droite du plan $x_1=x_4=0$, infiniment voisine de O_0, est double pour les surfaces envisagées.

Une surface F_2 et une surface F_5 forment une surface du système $|2F_1|$ passant par O_0 et cette surface a évidemment en ce point la même singularité qu'une surface F_1. On en conclut qu'une surface F_5 a un tacnode en O_0.

On sait qu'un tacnode d'une surface impose une condition aux surfaces adjointes, c'est-à-dire que les courbes canoniques de la surface passent par le tacnode. Cela étant, les points unis A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{15} de I_5 sur V ont même structure que O_0 et, par conséquent, les surfaces F, adjointes à une surface F_5, doivent passer par les points A_{11}, A_{12}, ..., A_{15}.

Le système $|F_1|$ est dépourvu de points-base. Les adjointes d'une surface Φ_5 appartiennent au système $|\Phi_1|$, qui a pour transformé le système $|F_1|$. Toutes les surfaces F_1 ne sont pas des adjointes d'une surface F_5, puisque ces adjointes doivent passer par les cinq points unis A_{11}, A_{12}, ..., A_{15}. Donc, le système adjoint à $|\Phi_5|$ est un système partiel appartenant au système $|\Phi_1|$. D'après la remarque faite plus haut, la variété Ω est, par conséquent, dépourvue de surface cinq-canonique.

La variété Ω est dépourvue de surfaces canonique, bicanonique, tricanonique et quatre-canonique. Elle est donc dépourvue de surfaces canonique et pluricanoniques.

7. Bien que nous ayons établi la propriété que nous avions en vue, il nous paraît intéressant de montrer que le système adjoint de $|\Phi_2|$ est bien le système $|\Phi_3|$ (toujours, bien entendu, à des composantes des points de diramation près).

Nous avons déjà observé qu'une surface F_2 a en O_0 un point simple, le plan tangent étant $x_1=0$, $\mu_1(x_2, x_3)=0$. On sait, d'autre part, qu'aux courbes canoniques d'une surface Φ_2 correspondent sur la surface F_2 homologue des courbes passant par O_0 et touchant en ce point le plan $x_4=0$. Les surfaces F_3 ont en O_0 un point simple, le plan tangent en ce point étant $x_4=0$. On en conclut que les surfaces Φ_3 se comportent au point de diramation correspondant à O_0 comme des adjointes aux surfaces Φ_2.

En O_0, une surface F_2 a un point simple, le plan tangent étant $x_4=0$. L'involution déterminée par I_5 sur une surface F_2

a donc un point uni parfait en O_2. Les transformées des courbes canoniques de la surface Φ_2 homologues ont donc un point triple en O_2.

En O_2, une surface F_3 possède un point double uniplanaire, le plan tangent étant $x_4=0$.

Opérons, dans le plan tangent $x_3=0$ à V en O_2, sur les sections de F_2, F_3, la transformation

$$\begin{pmatrix} y_0y_1 & y_0y_2 & y_1y_2 & y_2y_4 \\ x_2 & x_0 & x_1 & x_4 \end{pmatrix},$$

qui fait correspondre aux points infiniment voisins de O_2 dans le plan $x_4=0$, les points de la droite $y_2=y_4=0$.

Nous obtenons

$$\begin{gathered} y_2^4y_4^3\lambda_2(y_0, y_1) + y_0^2y_1^2y_2^2y_4^2\lambda_4(y_0, y_1)\mu_2(1, 0) + y_0^4y_1^4y_4\mu_4(1, 0) + \\ + y_0y_1y_2^3\lambda_4(y_0, y_1)\mu_1(1, 0) = 0, \\ y_0y_1y_2^2y_4^2\lambda_1(y_0, y_1)\mu_1(1, 0) + y_0^3y_1^3y_4^2\mu_3(1, 0) + y_2^3y_4\lambda_4(y_0, y_1) + \\ + y_0^2y_1^2y_2\lambda_3(y_0, y_1)\mu_2(1, 0) = 0. \end{gathered}$$

La première de ces surfaces passe simplement par la droite $y_2=y_4=0$ en y touchant le plan $y_4=0$. La seconde passe aussi simplement par cette droite, en y touchant le plan $y_2=0$. De plus, cette surface a trois points doubles sur la droite en question; ce sont les points qui annulent $\lambda_3(y_0, y_1)$.

On en conclut que la courbe intersection d'une surface F_2 et d'une surface F_3 passe par les trois points doubles de F_3, infiniment voisins de O_2, point double uniplanaire ordinaire pour la surface.

De tout ceci résulte qu'une surface Φ_3 coupe une surface Φ_2 suivant une courbe qui passe simplement par les points de diramation de Ω homologues de A_{11}, A_{12}, ..., A_{15} et triplement par les points de diramation homologues de A_{21}, A_{22}, ..., A_{25}. De telles courbes sont précisément les courbes canoniques des surfaces Φ_2.

On a donc bien

$$|\Phi_2'| = |\Phi_3|,$$

à des composantes des points de diramation près. Toute surface de $|\Phi_3|$ coupe une surface Φ_2 suivant une courbe canonique.

Observons encore que si, sur une surface Ψ de genre arithmétique p_a, nous avons une involution cyclique d'ordre p présentant τ_1 points unis parfaits et τ_2 points unis non parfaits, chacun d'eux ayant un point uni parfait dans son domaine du premier ordre, le genre arithmétique p_a' de la surface image de l'involution est donné par la formule

$$12(p_a+1)=12p(p_a'+1)+\tau_1(p-1)(p-5)+\frac{1}{2}\tau_2(p-1)(p-11),$$

Appliquons cette formule à une surface F_2. On a $p=5$, $\tau_1=\tau_2=5$, $p_a=124$. On en déduit $p_a'=25$. Le système adjoint à $|\Phi_2|$ a donc la dimension 24, qui est bien celle de $|\Phi_3|$.

Liége, le 29 août 1944.

M. HAYEZ, Imprimeur de l'Académie royale de Belgique, rue de Louvain, 112, Bruxelles.
(Domicile légal : rue de la Chancellerie, 4)