

Sulle superficie associate ad una successione  
 di Laplace chiusa <sup>(1)</sup>.

Nota di LUCIEN GODEAUX (a Liegi)

**Sunto.** - Si dimostra che una superficie associata ad una successione di LAPLACE chiusa è falda focale di due congruenze  $W$ .

**Résumé.** - On démontre qu'une surface associée à une suite de LEPLACE terminée est nappe focale de deux congruences  $W$ .

Consideriamo una superficie  $(x)$ , non rigata, di cui le asintotiche sono  $u$  ( $dv = 0$ ) e  $v$  ( $du = 0$ ). Diciamo  $U, V$  i punti della iperquadrica  $Q$  di KLEIN, di  $S_5$ , che rappresentano le tangenti alle asintotiche  $u, v$  in un punto  $x$  di  $(x)$ . Fra questi punti abbiamo, colle notazioni del nostro opuscolo *La Théorie des surfaces et l'espace réglé* <sup>(2)</sup>,

$$U^{10} + 2bV = 0, \quad V^{01} + 2aU = 0,$$

dove  $a, b$  sono funzioni non nulle di  $u, v$ .

I punti  $U, V$  appartengono ad una successione di LAPLACE

$$(L) \quad \dots, U_n, \dots, U_1, U, V, V_1, \dots, V_n, \dots,$$

dove ogni punto è il trasformato del precedente nel senso delle  $u$ .

Supponiamo che la successione di LAPLACE  $L$  si chiude nel punto  $U_n$ , presentante il caso di LAPLACE. Le tangenti alle curve  $v$  nei punti di una curva  $u$  sulla superficie  $(U_{n-1})$  passano per un punto  $U_n$  che non dipende da  $u$ . Si ha

$$h_n = -(\log. bh)_1 h_2 \dots h_{n-1}^{11} + h_{n-1} = 0,$$

dove  $h_1 = -(\log. b)^{11} + 4ab$ ,  $h_2 = -(\log. bh_1)^{11} + h_1, \dots$

Supponiamo inoltre che la curva  $(U_n)$  descritta dal punto  $U_n$  quando varia  $v$  non appartiene ad un iperpiano. Allora, il punto  $V_{n+2}$ , polo del iperpiano  $U_n U_n^{01} U_n^{02} U_n^{03} U_n^{04}$  osculatore alla curva  $(U_n)$

<sup>(1)</sup> Sunto di una conferenza fatta nell'Istituto di Geometria « LUIGI CREMONA » a Bologna, il 30 maggio 1960. Un lavoro più esteso sarà pubblicato in uno dei Volumi degli *Annali di Matematica* dedicati al Prof. E. BOMPIANI.

<sup>(2)</sup> Paris, Hermann, 1935.

non dipende da  $u$  e la successione  $L$  si chiude nel punto  $V_{n+2}$  presentante il caso di GOURSAT. La sviluppabile luogo delle tangenti alla curva  $(V_{n+2})$  non è altra che la superficie  $(V_{n+1})$ . Quando varia  $u$ , il punto  $V_{n+1}$  descrive una di queste tangenti.

Supponiamo (caso generale) che la retta  $V_{n+1}V_{n+2}$  taglia  $Q$  in due punti distinti di  $V_{n+1}$ ,  $V_{n+2}$ . Diciamo  $G$  uno di questi punti.

L'iperpiano coniugato di  $G$  rispetto all'iperquadrica  $Q$  contiene i punti  $U_n$ ,  $U_n^{01}$ ,  $U_n^{02}$ ,  $U_n^{03}$  ed evidentemente  $G$ .

Possiamo scrivere

$$V_{n+2}^{10} + AV_{n+2} = 0, \quad G = V_{n+2} + \lambda V_{n+1}.$$

Ne deduciamo che il punto  $G^{10}$  appartiene alla retta  $V_{n+1}V_{n+2}$ . Dunque, l'iperpiano coniugato di  $G^{10}$  contiene i punti  $U_n$ ,  $U_n^{01}$ ,  $U_n^{02}$ ,  $U_n^{03}$  ed anche il punto  $G$ , perchè la retta  $GG^{10}$  tocca  $Q$  nel punto  $G$ . I punti  $G$ ,  $G^{10}$  coincidono ed il punto  $G$  non dipende da  $u$ .

Diciamo  $G_1$  il punto dove la retta  $GG^{01}$  taglia la retta  $V_nV_{n+1}$ . L'iperpiano coniugato di  $G_1$  passa per i punti  $U_{n-1}$ ,  $U_n$  e quindi questo punto dipende da  $u$  e da  $v$ .

Sia  $\Omega(p, q) = 0$  la condizione perchè due punti  $p$ ,  $q$  siano coniugati rispetto alla iperquadrica  $Q$ . Questa ha per equazione  $\Omega(p, q) = 0$ .

Abbiamo

$$G_1 = G^{01} + tG,$$

dunque  $\Omega(G, G_1) = 0$  e possiamo scrivere

$$G_1 = V_{n+1}\Omega(V_n, G - V_n\Omega(V_{n+1}, G)).$$

Si vede allora che la retta  $G_1G_1^{10}$  passa per il punto

$$V_{n+2}\Omega(V_{n+1}, G) - V_{n+1}\Omega(V_{n+2}, G) \equiv G.$$

Ne concludiamo che il punto  $G_1$  descrive una rete  $(u, v)$  ed appartiene ad una successione di LAPLACE ( $G$ ) iscritta nella successione  $L$ . I successivi trasformati del punto  $G_1$  nel senso delle  $v$  appartengono alle rette  $V_nV_{n-1}$ ,  $V_{n-1}V_{n-2}$ , ... . Diciamo  $J$  quello di questi punti che appartiene alla retta  $UV$ . Possiamo scrivere

$$J = \lambda U - \mu V,$$

con

$$\lambda^{01} + 2a\mu = 0, \quad \mu^{10} + 2b\lambda = 0.$$

Diciamo  $J_1, J_2, \dots$  i trasformati di LAPLACE di  $J$  nel senso delle  $v$  e  $J_{-1}, J_{-2}, \dots$  quelli nel senso delle  $u$ . Abbiamo  $J_{-n-1} = G$ ,  $J_{-n-2} = G$ .

Consideriamo uno spazio  $S_6$  contenente  $S_5$  ed in questo spazio il punto  $U'$  di cui le coordinate omogenee sono quelle di  $U$  e  $\mu$  ed il punto  $V'$  di cui le coordinate sono quelle di  $V$  e  $\lambda$ . Abbiamo

$$U'^{10} + 2bV' = 0, \quad V'^{01} + 2aU' = 0,$$

dunque questi punti appartengono ad una successione di LAPLACE  $L'$  analoga a  $L$  e cogli stessi invarianti.

Abbiamo  $h_n = 0$ , dunque la successione  $L'$  si chiude nel punto  $U'_n$  presentante il caso di LAPLACE.

Ne risulta che la successione  $(G)$  si chiude nel punto  $J_{n+1}$  presentante anche il caso di LAPLACE, essendo il punto  $J_{n+1}$  intersezione delle rette  $U_n U_n^{01}, U'_n U_n^{01}$ .

Notiamo  $(\bar{x})$  la seconda falda focale della congruenza  $(j)$ , dove  $j$  è la retta rappresentata sopra  $Q$  dal punto  $J$ . Sia  $\bar{L}$  la successione di LAPLACE associata alla superficie  $(\bar{x})$ . Si vede facilmente che  $\bar{L}$  si chiude nel punto  $\bar{U}_n$  presentante il caso di LAPLACE e nel punto  $\bar{V}_{n+2}$  presentante il caso di GOURSAT o il caso misto.

Supponiamo adesso  $n = 1$ . Allora le asintotiche  $u$  della superficie  $(x)$  appartengono a complessi lineari. Diciamo  $\Sigma$  questi complessi.

La retta coniugata dello spazio  $U_1 U_1^{01} U_1^{02} U_1^{03}$  osculatore alla curva  $(U_1)$  in un punto  $U_1$  è  $V_2 V_3$ , quindi, quattro complessi  $\Sigma$  infinitamente vicini hanno in comune due rette  $g, g'$  di cui le immagini su  $Q$  sono i punti  $G, G'$  intersezioni di  $V_2 V_3$  con  $Q$ . Quando varia  $v$ , queste rette generano due rigate  $R, R'$  che hanno per immagine su  $Q$  le curve  $(G), (G')$ .

Consideriamo lo spazio  $GJ_{-2}J_{-1}J$  osculatore alla curva  $(G)$  in un punto  $G$ . La sezione di  $Q$  con questo spazio è una quadrica che rappresenta una congruenza bilineare di cui le direttrici  $r_1, r_2$  sono rappresentate dalle sezioni di  $Q$  con la retta coniugata di questo spazio. Le rette  $r_1, r_2$  sono la tangente flecnodale della rigata  $R$  di cui i punti di contatto sono sulla retta  $g$ .

Quando varia  $u$ , la retta  $g$  e le rette  $r_1, r_2$  non variano, ma il punto  $x$  descrive una asintotiche  $u$  sopra  $(x)$ .

Dunque, se noi consideriamo sopra la superficie  $(x)$  una asintotica  $u$  e la retta  $g$  corrispondente allo stesso valore di  $v$ , le rette appoggiate sulla curva  $u$  e sulla tangente flecnodale della rigata  $R$  di cui i punti di contatto sono sulla retta  $g$ , generano, quando varia  $v$ , una congruenza  $W$  di cui  $(x)$  è una falda focale.

Colla considerazione della rigata  $R'$ , si è condotti ad una seconda congruenza  $W$  di cui  $(x)$  è falda focale.