RECHERCHES SUR L'ENVELOPPE DES QUADRIQUES DE LIE D'UNE SURFACE

par **Lucien Godeaux** (Liège)

L'enveloppe des quadriques de Lie d'une surface (x) a été plusieurs fois étudiée, mais surtout dans des cas particuliers. On sait que cette enveloppe est formée de la surface (x) et en général de quatre autres nappes. Lorsque ces dernières nappes se réduisent à une seule (couples de surfaces ayant mêmes quadriques de Lie) la question a été étudiée par Demoulin et par nous ([1]). Nous avons ensuite étudié le cas où les quatre nappes se réduisent à deux. Dans ces deux cas, il y a conservation des asymptotiques sur les différentes nappes de l'enveloppe. Il n'en est plus de même lorsque les quatre dernières nappes sont distinctes ([2]). Dans cette note, nous complétons nos recherches dans l'hypothèse où les quatre dernières nappes sont distinctes mais où il y a conservation des asymptotiques, c'est-à-dire lorsque les asymptotiques sur les quatre nappes correspondent aux asymptotiques de la surface (x). On verra d'ailleurs qu'il suffit qu'il y ait conservation des asymptotiques sur une des nappes pour que cela ait lieu pour les trois autres.

1. Rappelons tout d'abord quelques propriétés connues et nos notations ([3]).

([1]) On trouvera la bibliographie complète de la question jusqu'en 1934 dans notre exposé sur *La théorie des surfaces et l'espace réglé.* Actualités scientifiques, N°. 138 (Paris, Hermann, 1934).

([2]) *Note sur les surfaces dont les quadriques de Lie ont cinq points caractéristiques* (Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique, 1941, pp. 487-498), *Note sur l'enveloppe des quadriques de Lie d'une surface* (Idem, 1953, pp. 156-164).

([3]) Voir notre exposé cité en ([1]).

Nous partons d'une surface (x) rapportée à ses asymptotiques u, v. Les coordonnées normales de Wilczynski du point x satisfont au système d'équations aux dérivées partielles, complètement intégrable,

$$x^{e0} + 2bx^{01} + c_1 x = 0,$$

$$x^{0e} + 2ax^{10} + c_2 x = 0.$$

Soient U, V les points de l'hyperquadrique de Klein Q de S_5 représentant les tangentes en un point x aux courbes u, v. Nous avons

$$U^{10} + 2bV = 0, \qquad V^{01} + 2aU = 0$$

et les points U, V sont consécutifs dans une suite de Laplace

$$\ldots, U_n, \ldots, U_1, U, V, V_1, \ldots, V_n, \ldots \tag{L}$$

(où chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u) autopolaire par rapport à l'hyperquadrique Q. Le point U_n est le pôle l'hyperplan $V_{n-2}V_{n-1}V_nV_{n+1}V_{n+2}$ et V_n celui de $U_{n-2}U_{n-1}U_nU_{n+1}U_{n+2}$.

Nous avons

$$U_n^{01} = U_{n+1} + U_n(\log bh_1 \ldots h_n)^{01}, \qquad U_n^{10} = h_n U_{n-1},$$

$$V_n^{10} = V_{n+1} + V_n(\log ak_1 \ldots k_n)^{10}, \qquad V_n^{01} = k_n V_{n-1},$$

où nous posons

$$h_n = -(\log bh_1 \ldots h_{n-1})^{11} + h_{n-1},$$

$$k_n = -(\log ak_1 \ldots k_{n-1})^{11} + k_{n-1}.$$

Au point x de la surface (x), nous attachons le tétraèdre de Cartan ayant pour sommets

$$x, \quad m = x(\log a)^{10} - 2x^{10}, \quad n = x(\log b)^{01} - 2x^{01},$$

$$y = [8ab - (\log a)^{10}(\log b)^{01}]x + 2x^{10}(\log b)^{01} + 2x^{01}(\log a)^{10} - 4x^{11},$$

et tout point de l'espace est donné par

$$z_1 x + z_2 m + z_3 n + z_4 y,$$

z_1, z_2, z_3, z_4 étant les coordonnées locales du point.

L'équation locale de la quadrique de Lie Φ attachée au point x est

$$z_1 z_4 + z_2 z_3 = 0.$$

L'enveloppe de cette quadrique se compose de la surface (x) comptée quatre fois et en général de quatre nappes que nous supposerons distinctes. Cela revient à supposer que les points de rencontre des droites $U_1 U_2$, $V_1 V_2$ avec Q sont distincts. Ces points représentent les côtés du quadrilatère de Demoulin.

Nous poserons

$$\alpha = 2(\log a)^{20} + \overline{(\log a)^{10}}^2 + 4(b^{01} + c_1),$$

$$\beta = 2(\log b)^{02} + \overline{(\log b)^{01}}^2 + 4(a^{10} + c_2).$$

2. Désignons par C_1, C_2 les points de rencontre de la droite $V_1 V_2$ et par D_1, D_2 ceux de la droite $U_1 U_2$ avec l'hyperquadrique Q.

La droite $C_1 D_1$ appartient à Q et représente un faisceau de rayons dont le centre P_{11} est un point caractéristique de la quadrique de Lie Φ et dont le plan est le plan tangent à cette quadrique, à la quadrique Φ_1 et à la surface (P_{11}). Cette dernière surface est l'une des nappes de l'enveloppe de la quadrique de Lie Φ.

Les points engendrant les autres nappes de l'enveloppe de Φ sont, en dehors de la surface (x), les points P_{12}, P_{21}, P_{22} qui correspondent aux droites $C_1 D_2$, $C_2 D_1$, $C_2 D_2$ appartenant à l'hyperquadrique Q.

Supposons que les lignes asymptotiques de la surface (P_{11}) soient les courbes u, v. Alors il existe, sur la droite $C_1 D_1$, deux points $\bar{U}$, $\bar{V}$ représentant les tangentes aux courbes u, v en P_{11}, transformés de Laplace l'un de l'autre. D'une manière précise, $\bar{V}$ est le transformé de Laplace de $\bar{U}$ dans le sens des u et $\bar{U}$ celui de $\bar{V}$ dans le sens des v.

Désignons par $\bar{U}_1$ le transformé de Laplace de $\bar{U}$ dans le sens des v. Les points $\bar{U}$, $\bar{V}$, V_1, V_2 sont dans un même plan, donc leurs transformés de Laplace dans le sens des v, c'est-à-dire $\bar{U}_1$, $\bar{U}$, V, V_1, sont également dans un même plan. Les droites $\bar{U}\bar{U}_1$, $V V_1$ se rencontrent donc en un point que nous désignerons par C_1'.

La tangente à la ligne v en C_1 à la surface (C_1) est l'intersection des plans $\bar{U}_1 \bar{U} \bar{V}$, $V V_1 V_2$, c'est-à-dire la droite $C_1 C_1'$. La tangente à la ligne u en C_1' à la surface (C_1') est l'intersection des mêmes plans, c'est-à-dire la droite $C_1' C_1$. Il en résulte que les points $C_1 C_1'$ sont transformés de Laplace l'un de l'autre.

3. Si nous posons

$$\xi^2 + \alpha = 0, \qquad \eta^2 + \beta = 0,$$

les points C_1, C_2, D_1, D_2 sont donnés par

$$C_1 = V_2 + V_1[\xi + (\log a k_1)^{10}], \qquad C_2 = V_2 + V_1[-\xi + (\log a k_1)^{10}],$$

$$D_1 = U_2 + U_1[\eta + (\log b h_1)^{01}], \qquad D_2 = U_2 + U_1[-\eta + (\log b h_1)^{01}].$$

Nous avons

$$C_1^{01} = k_2 V_1 + k_1 V[\xi + (\log a k_1)^{10}] + V_1[\xi^{01} + (\log a k_1)^{11}]$$
$$= (\xi^{01} + k_1) V_1 + k_1 V[\xi + (\log a k_1)^{10}].$$

On a

$$\alpha^{01} = -2k_1(\log a k_1)^{10}, \quad \beta^{10} = -2h_1(\log b h_1)^{01},$$

d'où

$$\xi C_1^{01} = k_1[\xi + (\log a k_1)^{10}](V_1 + \xi V).$$

Nous pouvons donc poser

$$C_1' = V_1 + \xi V.$$

Nous avons alors

$$C_1'^{10} = V_2 + V_1[\xi + (\log a k_1)^{10}] + \xi V(\log a \xi)^{10},$$
$$C_1'^{10} = C_1 + \xi V(\log a \xi)^{10}.$$

Pour que C_1 soit le transformé de Laplace de C_1' dans le sens des u, on doit donc avoir $(\log a \xi)^{10} = 0$, car $\xi = 0$ entraîne $\alpha = 0$ et la droite $V_1 V_2$ touche alors Q en V_2. L'enveloppe des quadriques de Lie n'a alors que trois nappes en dehors de la surface (x).

On a

$$(\log a^2 \alpha)^{10} = 2(\log a \xi)^{10},$$
$$b\beta(\log b^2 \beta)^{01} = a\alpha(\log a^2 \alpha)^{10} = 0.$$

Par conséquent le point C_2 décrit, comme C_1, un réseau conjugué à la congruence $(V_1 V_2)$ et les points D_1, D_2 des réseaux conjugués à la congruence $(U_1\ U_2)$. On en conclut que si les asymptotiques de la surface (P_{11}) sont les courbes u, v, il en est de même des asymptotiques des surfaces (P_{12}), (P_{21}), (P_{22}).

La droite c_1 représentée sur Q par le point C_1 décrit une congruence W dont les surfaces focales sont les surfaces (P_{11}), (P_{12}). Les droites c_2, d_1, d_2 qui correspondent respectivement aux points C_2, D_1, D_2, décrivent également des congruences W ayant respectivement pour nappes focales (P_{21}) et (P_{22}), (P_{11}) et (P_{21}), (P_{21}) et (P_{22}).

Réciproquement, si l'on a $(\log a^2 \alpha)^{10} = 0$, les quatre nappes de l'enveloppe des quadriques de Lie, en dehors de la surface (x), ont u et v pour asymptotiques.

En résumé: *La condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait conservation des asymptotiques sur les cinq nappes, supposées distinctes, de l'enveloppe des quadriques de Lie de la surface (x), est que l'on ait soit* $(\log a^2 \alpha)^{10} = 0$, soit $(\log b^2 \beta)^{01} = 0$.

Il suffit qu'il y ait conservation des asymptotiques sur une des nappes de l'enveloppe distincte de la surface (x) pour que la propriété soit vérifiée pour toutes les nappes.

Les côtés du quadrilatère de Demoulin engendrent des congruences W dont les nappes focales sont les quatre nappes de l'enveloppe distinctes de (x).

4. Nous avons établi que l'on a des relations linéaires entre sept points consécutifs de la suite L, relations qui deviennent actuellement

$$V_3 + V_2(\log a^3 k_1^2 k_2)^{10} + \alpha_1 V_1 + 2b[\beta U + U_1(\log b h_1)^{01} + U_2] = 0, \tag{1}$$

$$U_3 + U_2(\log b^3 h_1^2 h_2)^{01} + \beta_1 U_1 + 2a[\alpha V + V_1(\log a k_1)^{10} + V_2] = 0, \tag{2}$$

où l'on a posé

$$\alpha_1 = \alpha + (\log a k_1)^{20} + (\log a k_1)^{10}(\log a^2 k_1)^{10},$$

$$\beta_1 = \beta + (\log b h_1)^{02} + (\log b h_1)^{01}(\log b^2 h_1)^{01}.$$

Dans la première de ces relations, le terme en V a pour coefficient $\frac{\alpha}{2}(\log a^2\alpha)^{10}=0$, et dans la seconde, le terme en U a pour coefficient $\frac{\beta}{2}(\log b^2\beta)^{01}=0$.

Observons tout de suite que si l'on dérive totalement la relation (1) par rapport à v, on doit retrouver la seconde, ce qui entraîne

$$\alpha_1 k_1 = 4ab\alpha.$$

On obtient de même, en dérivant totalement la relation (2) par rapport à u,

$$\beta_1 h_1 = 4ab\beta.$$

5. Les tangentes aux lignes v aux points C_1, C_2 se coupent en un point

$$A = 2a[\alpha V + V_1(\log.\, a k_1)^{10} + V_2]$$

et les tangentes aux lignes u en D_1, D_2 se coupent en un point

$$B = 2b[\beta U + U_1(\log.\, b h_1)^{01} + U_2].$$

On vérifie immédiatement, en vertu des relations (1) et (2), que l'on a

$$A^{10} + 2aB = 0, \qquad B^{01} + 2bA = 0,$$

c'est-à-dire que les points A, B sont transformés de Laplace l'un de l'autre.

La tangente à la ligne u au point C_1 est déterminée par le point

$$C_1^{10} + C_1[(\log a)^{10} - \xi] = -B.$$

On a de même

$$C_2^{10} + C_2[(\log a)^{10} + \xi] = -B.$$

On voit donc que les tangentes aux lignes u en C_1, C_2 se coupent en B. De même, les tangentes aux lignes v en D_1, D_2 se coupent en A.

6. Désignons par A_1, A_2, ... les transformés successifs de A dans le sens des v et par B_1, B_2, ... ceux de B dans le sens des u.

Nous avons

$$A_1 = A^{01} - A(\log. a)^{01}, \qquad A_1^{10} = k_1 A,$$
$$A_2 = A_1^{01} - A_1(\log. a k_1)^{01}, \qquad A_2^{10} = k_2 A_1, \ \ldots$$

et

$$B_1 = B^{10} - B(\log. b)^{10}, \qquad B_1^{01} = h_1 B,$$
$$B_2 = B_1^{10} - B_1(\log. b h_1) \qquad {}^{10}, B_2^{01} = h_2 B_1, \ \ldots .$$

Observons que le point A est l'intersection des plans $V V_1 V_2$ et $U_1 U_2 U_3$, donc le point A_1 est l'intersection des plans $U V V_1$ et $U_2 U_3 U_4$, le point A_2 l'intersection $U_1 U V$ et $U_3 U_4 U_5$, le point A_3 celle des plans $U_2 U_1 U$ et $U_4 U_5 U_6$. Enfin, le point A_n est l'intersection des plans $U_{n-1} U_{n-2} U_{n-3}$ et $U_{n+1} U_{n+2} U_{n+3}$.

De même, le point B est l'intersection des plans $U U_1 U_2$ et $V_1 V_2 V_3$, le point B_1 l'intersection des plans $V U U_1$ et $V_2 V_3 V_4$, le point B_2 celle des plans $V_1 V U$ et $V_3 V_4 V_5$. Le point B_n est l'intersection des plans $V_{n-1} V_{n-2} V_{n-3}$ et $V_{n+1} V_{n+2} V_{n+3}$.

Si, comme nous l'avons fait ailleurs ([1]), nous appelons polyèdre de Laplace à faces planes associé à la suite L l'ensemble des plans déterminés par trois points consécutifs de la suite, on voit que:

La suite de Laplace déterminée par les points A, B est doublement inscrite dans le polyèdre à faces planes associé à la suite L.

Le plan $U_n U_{n+1} U_{n+2}$ contient les points A_{n-1} et A_{n+3}. Le plan $V_n V_{n+1} V_{n+2}$ contient les points B_{n-1}, B_{n+3}. En particulier, le plan $U U_1 U_2$ contient les points B et A_3, le plan $V V_1 V_2$ contient les points A et B_3. Enfin le plan $V U U_1$ contient les points B_1 et A_2 et le plan $U V V_1$ les points A_1, B_2.

Les plans $U_n U_{n+1} U_{n+2}$ et $V_n V_{n+1} V_{n+2}$ étant conjugués par rapport à Q, chacun des points A_{n-1}, A_{n+3} est conjugué à chacun des points B_{n-1}, B_{n+3}.

7. Les plans $V_2 V_3 V_4$ et $V U U_1$ ayant un point commun, il existe une relation linéaire entre les six points déterminant ces plans. On l'obtiendra en déri-

---

([1]) *Sur les suites de Laplace inscrites dans un polyèdre de Laplace* (Buletinul Institutului Politehnic din Jasi, 1957, pp. 7-10).

vant la relation (i) par rapport à u, ce qui donne

$$\left.\begin{aligned} V_4 + V_3\left(\log.\frac{a^4 k_1^3 k_2^2 k_3}{b}\right)^{10} + \alpha_2 V_2 + \alpha_1 V_1\left(\log.\frac{a k_1 \alpha_1}{b}\right)^{10} \\ + 2b[-2b\beta V - h_1 U(\log b h_1)^{01} + h_4 U_1] = 0, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

où l'on a posé

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \left(\log\frac{a^3 k_1^2 k_2}{b}\right)^{20} + \left(\log\frac{a^3 k_1^2 k_2}{b}\right)^{10}\left(\log\frac{a k_2 k_2}{b}\right)^{10}.$$

Dans cette relation, le terme en V_1 doit disparaître. Effectivement, de la relation $\alpha_1 k_1 = 4ab\alpha$, on déduit $\left(\log\frac{a k_1 \alpha_1}{b}\right)^{10} = 0$.

Inversement, en dérivant la relation (3) par rapport à v, on doit retrouver la relation (1). Dans la dérivation par rapport à v de (3), le coefficient de V_3 est

$$k_4 + \left(\log.\frac{a^4 k_1^3 k_2^2 k_3}{b}\right)^{11} = h_1,$$

car on a

$$k_4 = -(\log a^4 k_1^3 k_2^2 k_3)^{11} + 4ab.$$

Le coefficient de V_1 est $k_1\alpha_2$. En identifiant à (3), on trouve

$$k_2\alpha_2 = h_1\alpha_1.$$

Le terme en V a pour coefficient $-(4b^{-}\beta)^{01}$ et disparait.

On a de même

$$U_4 + U_3\left(\log.\frac{b^4 h_1^3 h_2^2 h_3}{a}\right)^{01} + \beta_2 U_2 + 2a[-2a\alpha U - k_1 V(\log. a k_1)^{10} + h_1 V_1] = 0,$$

où l'on a posé

$$\beta_2 = \beta_1 + \left(\log.\frac{b^3 h_1^2 h_2}{a}\right)^{02} + \left(\log.\frac{b^3 h_1^2 h_2}{a}\right)^{01}\left(\log.\frac{b h_1 h_2}{a}\right)^{01}.$$

En dérivant la relation (4) par rapport à u et en identifiant avec la relation (2), on trouve

$$h_2\beta_2 = k_1\beta_1.$$

8. Dans le cas où la surface (x) est quelconque, nous avons établi les relations, pour $n \geqslant 3$, [1]

---

[1] *Sur la suite de Laplace de l'espace réglé associée à une surface* (Bulletin de la Société roy. des Sciences de Liège, 1934, pp. 64-67).

$$\left.\begin{aligned} & V_{n+3} + V_{n+2}\left(\log.\frac{a^{n+3}k_1^{n+2}\ \ldots\ k_{n+2}}{b^n h_1^{n-1}\ \ldots\ h_{n-1}}\right)^{10} + \alpha_{n+1}V_{n+1} + \gamma_n V_n \\ & -\frac{b h_1\ \ldots\ h_n}{a k_1\ \ldots\ k_{n-1}}\left[\beta_n V_{n-1} - k_{n-1}V_{n-2}\left(\log.\frac{b^{n+1}\ \ldots\ h_n}{a^{n-2}\ \ldots\ k_{n-3}}\right)^{01} + k_{n-1}k_{n-2}V_{n-3}\right] = 0, \end{aligned}\right\} (5)$$

$$\left.\begin{aligned} & U_{n+3} + U_{n+2}\left(\log.\frac{b^{n+3}h_1^{n+2}\ \ldots\ h_{n+2}}{a^n k^{n-1}\ \ldots\ k_{n-1}}\right)^{01} + \beta_{n+1}U_{n+1} + \delta_n U_n \\ & -\frac{a k_1\ \ldots\ k_n}{b h_1\ \ldots\ h_{n-1}}\left[\alpha_n U_{n-1} - h_{n-1}U_{n-2}\left(\log.\frac{a^{n+1}\ \ldots\ k_n}{b^{n-2}\ \ldots\ h_{n-3}}\right)^{01} + h_{n-1}h_{n-2}U_{n-3}\right] = 0, \end{aligned}\right\} (6)$$

en posant

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} + \left(\log.\frac{a^{n+1}\ \ldots\ k_n}{b^{n-2}\ \ldots\ h_{n-3}}\right) + \left(\log.\frac{a^{n+1}\ \ldots\ k_n}{b^{n-2}\ \ldots\ h_{n-3}}\right)^{10}\left(\log.\frac{a\ \ldots\ k_n}{b\ \ldots\ h_{n-2}}\right)^{10},$$

$$\beta_n = \beta_{n-1} + \left(\log.\frac{b^{n+1}\ \ldots\ h_n}{a^{n-2}\ \ldots\ k_{n-3}}\right)^{02} + \left(\log.\frac{b^{n+1}\ \ldots\ h_n}{a^{n-2}\ \ldots\ k_{n-3}}\right)^{01}\left(\log.\frac{b\ \ldots\ h_n}{a\ \ldots\ k_{n-2}}\right)^{01}.$$

Actuellement, les plans $V_{n+3}V_{n+2}V_{n+1}$ et $V_{n-1}V_{n-2}V_{n-3}$ ayant un point commun, le terme en V_n disparait et on a $\gamma_n = 0$. De même, on a $\delta_n = 0$.

Si nous dérivons la relation (5) par rapport à v, nous devons trouver la même relation où l'on a remplacé n par $n-1$. Dans cette dérivation, le terme en V_{n+2} a pour coefficient h_n et celui en V_{n+1}, $k_{n+1}\ {}_{n+1}$. On a donc

$$k_{n+1}\alpha_{n+1} = h_n\alpha_n.$$

On a de même, en dérivant (6) par rapport à u,

$$h_{n+1}\beta_{n+1} = k_n\beta_n.$$

On voit facilement que l'on a

$$\left(\frac{b h_1\ \ldots\ h_n}{a\ \ldots\ k_{n-1}}\beta_n\right)^{01} = 0, \qquad \left(\frac{a k_1\ \ldots\ k_n}{b h_1\ \ldots\ h_{n-1}}\alpha_n\right)^{10} = 0,$$

car, par exemple,

$$\frac{b h_1\ \ldots\ h_n}{a k_1\ \ldots\ k_{n-1}}\beta_n = \frac{b\ \ldots\ h_{n-1}}{a\ \ldots\ k_{n-2}}\beta_{n-1} = \cdots = 4b^2\beta.$$

Ceci montre que dans la dérivation de (5) par rapport à v, le terme en V_{n-1} disparait et que dans la dérivation par rapport à u de (6), le terme en U_{n-1} disparait également.

Pour $n = 2$, on a

$$V_5 + V_4\left(\log.\frac{a^5 k_1^4 k_2^3 k_3^2 k_4}{b^2 h_1}\right)^{10} + \alpha_3 V_3 - \frac{b h_1 h_2}{a k_1}\left[\beta_2 V_1 - k_1 V(\log.\, b^3 h_1^2 h_2)^{01} - 2 a k_1 U\right] = 0,$$

$$U_5 + U_4\left(\log.\frac{b^5 h_1^4 h_2^3 h_3^2 h_4}{a^2 k_1}\right)^{01} + \beta_3 V_3 - \frac{a k_1 k_2}{b h_1}\left[\alpha_2 U_1 - h_1 U(\log.\, a^3 k_1^2 k_2)^{10} - 2 b h_1 V\right] = 0.$$

9. La quadrique de Lie Φ a pour équation locale

$$\Phi \equiv z_1 z_4 + z_2 z_3 = 0.$$

Dans le cas d'une surface (x) quelconque, la quadrique Φ_1 a pour équation locale

$$2a(z_1^2 + \alpha z_2^2 + \beta z_3^2 + \alpha\beta z_4^2) - \beta(\log.\, b^2\beta)^{01}(z_1 z_4 + z_2 z_3) = 0, \tag{7}$$

donc actuellement, on a

$$\Phi_1 \equiv z_1^2 + \alpha z_2^2 + \beta z_3^2 + \alpha\beta z_4^2 = 0.$$

Observons que la condition pour que la quadrique Φ soit sa propre polaire réciproque par rapport à la quadrique (7) est que l'on ait $(b^2\beta)^{01} = 0$. Donc:

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait conservation des asymptotiques sur les nappes de l'enveloppe des quadriques de Lie d'une surface est que la quadrique de Lie soit sa propre polaire réciproque par rapport à la quadrique Φ_1.

10. Nous allons maintenant former l'équation de la quadrique Φ_2, dont les génératrices rectilignes sont représentées par les sections de Q par les plans conjugués $U_2 U_3 U_4$ et $V_2 V_3 V_4$.

À cet effet, considérons le point

$$\eta_2 U_2 + \eta_1 U_1 + \eta_0 U + \xi_0 V + \xi_1 V_1 + \xi_2 V_2.$$

La condition pour qu'il appartienne à l'hyperquadrique Q est

$$\beta\eta_2^2 + [\eta_1 - \eta_2(\log b h_1)^{01}]^2 - 2\eta_0\eta_2 - \alpha\xi_2^2 - [\xi_1 - \xi_2(\log a k_1)^{10}]^2 + 2\xi_0\xi_2 = 0.$$

Il lui correspond alors la droite dont les équations locales sont

$$\eta_2[z_1(\log b h_1)^{01} + \beta z_3] - \eta_1 z_1 - 2\eta_0 z_3 + 2\xi_0 z_1 + \xi_1 z_1 - \xi_2[z_1(\log a k_1)^{10} + \alpha z_2] = 0,$$

$$\eta_2[z_3(\log b h_1)^{01} - z_1] - \eta_1 z_3 + 2\xi_0 z_4 - \xi_1 z_3 + \xi_2[z_3(\log a k_1)^{10} - \alpha z_4] = 0,$$

$$\eta_2[z_2(\log b h_1)^{01} - \beta z_4] - \eta_1 z_2 + 2\eta_0 z_4 - \xi_1 z_2 + \xi_2[z_2(\log a k_1)^{10} - z_1] = 0,$$

$$\eta_2[z_2 + z_4(\log b h_1)^{01}] - \eta_1 z_4 + \xi_1 z_4 - \xi_2[z_3 + z_4(\log a k_1)^{10}] = 0.$$

Le plan $U_2 U_3 U_4$ est déterminé par les points

$$U_2, \quad \beta_1 U_1 + 2a[\alpha V + V_1 (\log a k_1)^{10} + V_2], \quad -2a\alpha U - k_1 (\log a k_1)^{10} V + k_1 V_1,$$

et l'équation de la quadrique Φ_2 est

$$a k_1 (z_1^2 - \alpha z_2^2 - \beta z_3^2 + \alpha\beta z_4^2) - k_1 \beta_1 (\log a k_1)^{10} (z_2^2 + \beta z_4^2) - 4a^2 \alpha (\log b h_1)^{01} (z_3^2 + \alpha z_4^2)$$
$$+ k_1 \beta_1 (z_1 z_2 - \beta z_3 z_4) - 2a k_1 (\log a k_1)^{10} (z_1 z_2 + \beta z_3 z_4)$$
$$- 2a k_1 (\log b h_1)^{01} (z_1 z_3 + \alpha z_2 z_4] + 4a^2 \alpha (z_1 z_3 - \alpha z_2 z_4)$$
$$+ 2a k_1 (\log a k_1)^{10} (\log b h_1)^{01} (z_2 z_3 - z_1 z_4) + 2a\alpha\beta_1 (z_1 z_4 + z_2 z_3) = 0.$$

En partant du plan $V_2 V_3 V_4$, on trouve l'équation

$$b h_1 (z_1^2 - \alpha z_2^2 - \beta z_3^2 + \alpha\beta z_4^2) - h_1 \alpha_1 (\log b h_1)^{01} (z_3^2 + \alpha z_4^2) - 4b^2 \beta (\log a k_1)^{10} (z_2^2 + \beta z_4^2)$$
$$+ 4b^2 \alpha (z_1 z_2 - \beta z_3 z_4) - 2b h_1 (\log a k_1)^{10} (z_1 z_2 + \beta z_3 z_4)$$
$$- 2b h_1 (\log b h_1)^{01} (z_1 z_3 + \alpha z_2 z_4) + h_1 \alpha_1 (z_1 z_3 - \alpha z_2 z_4)$$
$$+ 2b h_1 (\log a k_1)^{10} (\log b h_1)^{01} (z_2 z_3 - z_1 z_4) + 2b\beta\alpha_1 (z_1 z_4 + z_2 z_3) = 0.$$

On passe d'une équation à l'autre en utilisant les relations $b_1 \beta_1 = 4ab\beta$ $k_1 \alpha_1 = 4ab\alpha$.

11. Nous avons appelé plus haut $\bar{U}$, $\bar{V}$ les points de la droite $C_1 D_1$ qui représentent les tangentes aux asymptotiques u, v de la surface (P_{11}). $\bar{U}$ est de la forme $\lambda C_1 + \mu D_1$ et le point $\bar{U}^{10}$ doit appartenir à la droite $C_1 D_1$. De même, le point $\bar{V}^{01}$ doit appartenir à la droite $C_1 D_1$. On trouve ainsi

$$\bar{U} = (h_1 + \eta^{10}) C_1 - 2b\eta D_1, \qquad \bar{V} = (k_1 + \xi^{01}) D_1 - 2a\xi C_1.$$

On obtiendra les points analogues sur $C_1 D_2$ en changeant D_1 en D_2 et η en $-\eta$, sur $C_2 D_1$ en changeant C_1 en C_2 et ξ en $-\xi$, sur $C_2 D_2$ en changeant C_1, D_1 en C_2, D_2 et η en $-\eta$, ξ en $-\xi$.

Les points $\bar{U}$, $\bar{V}$ déterminent une suite de Laplace analogue à L et que nous désignerons par $\bar{L}$.

Les points C_1, D_1 déterminent des suites de Laplace inscrites dans les suites L et $\bar{L}$. Si C_1'' est le second transformé de Laplace de C_1 dans le sens des v et D_1'' celui de D_1 dans le sens des u, le point C_1'' appartient aux droites VU et $\bar{U}_1 \bar{U}_2$, le point D_1'' aux droites UV et $\bar{V}_1 \bar{V}_2$.

La suite de Laplace $\bar{L}$ est, comme la suite L, autopolaire par rapport à l'hyperquadrique Q et les sections de cette hyperquadrique par les plans $\bar{U}\bar{U}_1\bar{U}_2$ et $\bar{V}\bar{V}_1\bar{V}_2$ représentent deux demi-quadriques ayant pour support commun la quadrique de Lie $\overline{\Phi}$ de la surface (P_{11}) associée au point P_{11}. La droite UV appartenant à Q, la surface (x) fait partie de l'enveloppe des quadriques de Lie $\overline{\Phi}$ de la surface (P_{11}). On en conclut que sur les différentes nappes des enveloppes des quadriques de Lie relatives aux surfaces (P_{11}), (P_{12}), (P_{21}), (P_{22}) les asymptotiques sont les courbes u, v.

S'il y a conservation des asymptotiques sur les nappes de l'enveloppe des quadriques de Lie d'une surface (x), cette surface fait partie de l'enveloppe des quadriques de Lie des quatre autres nappes de la première enveloppe. Il y a conservation des asymptotiques sur les nappes de ces différentes enveloppes.

Liège, Mars 1959.