Sur les Surfaces annulant certaines matrices de formes linéaires,

par LUCIEN GODEAUX, Correspondant de l'Académie.

Dans cette note, nous nous proposons d'étudier les surfaces algébriques annulant une matrice à quatre colonnes et $n+1$ lignes, dont les éléments sont des formes linéaires par rapport à $n+1$ variables, coordonnées ponctuelles d'un espace S_n à n dimensions. De telles surfaces sont d'ordre $\binom{n+1}{3}$ et il existe ∞^2 espaces linéaires à $n-3$ dimensions s'appuyant en $\binom{n}{3}$ points sur une de ces surfaces.

Ces surfaces ont été rencontrées dans le problème suivant : Considérons, dans un espace linéaire S_m à m dimensions, $m-3$ hyperquadriques V_{m-1}^2, linéairement indépendantes, ayant en commun un espace linéaire S_{m-4} à $m-4$ dimensions. Les équations de ces hyperquadriques peuvent s'écrire sous la forme

$$x_4\alpha_{i4} + x_5\alpha_{i5} + \cdots + x_m\alpha_{im} + \alpha_i = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m-3)$$

où les α_{ik} sont des formes linéaires, les α_i des formes quadratiques en $x_0, x_1, \ldots, x_m$.

L'espace S_{m-4} a pour équations $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Les hyperquadriques considérées ont encore en commun une variété à trois dimensions, rationnelle, d'ordre $\frac{1}{6}(m^3 - 9m^2 + 12m - 36)$, représentable point par point sur un espace ordinaire de telle sorte qu'aux sections hyperplanes correspondent des surfaces d'ordre $m-2$ ayant en commun une courbe fixe d'ordre $\frac{1}{6}m(m-3)$. La section de cette variété par l'espace S_{m-4} est précisément la surface étudiée dans cette note. Les hyperquadriques considérées, définissant la variété à trois dimensions, sont $m-7$ fois spécialisées et les espaces doubles, à $m-8$ dimensions, appartiennent à l'espace S_{m-4}. Parmi ces hyperquadriques, il y en a ∞^2 qui sont $m-6$ fois spécialisées et les espaces doubles, à $m-7$ dimensions, s'appuient en $\binom{m-4}{3}$ points sur la surface de la variété appartenant à l'espace S_{m-4}.

1. Considérons deux espaces linéaires Σ, Σ' à n dimensions, liés par quatre réciprocités linéairement indépendantes

$$\left.\begin{array}{c}\sum_{i,k} a_{ik}\, x_i\, x'_k = 0, \quad \sum_{i,k} b_{ik}\, x_i\, x'_k = 0, \quad \sum_{i,k} c_{ik}\, x_i\, x'_k = 0, \\ \sum_{i,k} d_{ik}\, x_i\, x'_k = 0, \\ (i, k = 0, 1, \ldots, n).\end{array}\right\} \tag{1}$$

A un point x de Σ ces réciprocités font correspondre dans Σ' quatre hyperplans ayant en général en commun un espace linéaire à $n-4$ dimensions. Le lieu des points x de Σ tels que les hyperplans correspondants aient en commun un espace linéaire à $n-3$ dimensions est une surface F représentée par les équations

$$\left\| \sum_i a_{ik}\, x_i \quad \sum_i b_{ik}\, x_i \quad \sum_i c_{ik}\, x_i \quad \sum_i d_{ik}\, x_i \right\| = 0, \tag{2}$$
$$(k = 0, 1, \ldots, n).$$

De même, le lieu des points x' de Σ' auxquels les réciprocités (1) font correspondre quatre hyperplans passant par un espace à $n-3$ dimensions est la surface F′ d'équations

$$\left\| \sum_k a_{ik}\, x'_k \quad \sum_k b_{ik}\, x'_k \quad \sum_k c_{ik}\, x'_k \quad \sum_k d_{ik}\, x'_k \right\| = 0, \tag{3}$$
$$(i = 0, 1, \ldots, n).$$

Entre les différents éléments d'une même ligne de la matrice (2) existe une même relation linéaire

$$y_1 \sum_i a_{ik}\, x_i + y_2 \sum_i b_{ik}\, x_i + y_3 \sum_i c_{ik}\, x_i + y_4 \sum_i d_{ik}\, x_i = 0,$$
$$(k = 0, 1, \dots, n)$$

relation que nous écrirons sous la forme

$$x_0\, \varphi_{0k} + x_1\, \varphi_{1k} + \cdots + x_n\, \varphi_{nk} = 0 \tag{4}$$

en posant

$$\varphi_{ik}\,(y_1, y_2, y_3, y_4) \equiv a_{ik}\, y_1 + b_{ik}\, y_2 + c_{ik}\, y_3 + d_{ik}\, y_4.$$

Interprétons y_1, y_2, y_3, y_4 comme coordonnées des points d'un espace ordinaire S_3. En éliminant les x entre les équations (4), on obtient l'équation

$$|\,\varphi_{0k}\ \varphi_{1k} \cdots \varphi_{nk}\,| = 0, \qquad (k = 0, 1, \dots, n), \tag{5}$$

d'une surface F_0, d'ordre $n+1$, birationnellement identique à F.

En opérant de même sur la matrice (3), on retrouve l'équation (5), sauf changement des lignes en colonnes. Les surfaces F, F′ sont donc birationnellement identiques à la surface F_0 et par suite entre elles.

2. A la section de la surface F par l'hyperplan

$$\xi_0\, x_0 + \xi_1\, x_1 + \cdots + \xi_n\, x_n = 0$$

correspond sur la surface F_0 la courbe représentée par les équations

$$\left\| \begin{matrix} \varphi_{00} & \varphi_{10} & \cdots & \varphi_{n0} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_{0n} & \varphi_{1n} & \cdots & \varphi_{nn} \\ \xi_0 & \xi_1 & \cdots & \xi_n \end{matrix} \right\| = 0,$$

c'est-à-dire une courbe d'ordre $\frac{1}{2}\, n\,(n+1)$. L'ordre de F est égal au degré du système linéaire formé par ces courbes, sur la surface F_0, lorsque les ξ varient.

Les équations

$$\begin{Vmatrix} \varphi_{01} & \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_{0n} & \varphi_{1n} & \cdots & \varphi_{nn} \\ \xi_0 & \xi_1 & \cdots & \xi_n \\ \eta_0 & \eta_1 & \cdots & \eta_n \end{Vmatrix} = 0, \tag{6}$$

représentent une courbe d'ordre $\frac{1}{2} n(n-1)$ s'appuyant en $\frac{1}{3}(n-1)n(n+1)$ points sur la courbe

$$\| \varphi_{0i} \, \varphi_{1i} \cdots \varphi_{ni} \| = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{7}$$

d'ordre $\frac{1}{2} n(n+1)$ (¹). La surface F_0 passe par la courbe (7) et coupe la courbe (6), en dehors de la courbe (7), en $\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)$ points. La surface F est donc d'ordre $\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)$.

De même, à la section de F′ par l'hyperplan

$$\xi'_0 x'_0 + \xi'_1 x'_1 + \cdots + \xi'_n x'_n = 0$$

correspond sur F_0 la courbe d'équations

$$\begin{Vmatrix} \varphi_{00} & \varphi_{10} & \cdots & \varphi_{n0} & \xi'_0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_{0n} & \varphi_{1n} & \cdots & \varphi_{nn} & \xi'_n \end{Vmatrix} = 0.$$

La surface F′ est d'ordre $\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)$ également.

Désignons par C les sections hyperplanes de F, par C′ celles de F′ et conservons ces notations pour les courbes qui leur correspondent sur F_0. Les systèmes $|C|$, $|C'|$ sont de degré $\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)$ et une courbe C rencontre une courbe C′ en $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ points (²).

(¹) Voir Stuyvaert, Cinq Études de Géométrie analytique. (*Mém. de la Soc. roy. des Sc. de Liége*, 1907, 3ᵉ série, t. VII.) Voir pp. 37 et 38.

(²) Stuyvaert, *loc. cit.*

3. Considérons la variété à trois dimensions, V_3, représentée par les équations

$$\| \sum_i a_{ik} x_i \quad \sum_i b_{ik} x_i \quad \sum_i c_{ik} x_i \quad \sum_i d_{ik} x_i \quad \xi'_k \| = 0, \qquad (8)$$

$$(k = 0, 1, \ldots, n)$$

où les ξ' sont des constantes. Cette variété V_3 est le lieu des points de Σ auxquels les réciprocités (1) font correspondre des espaces S_{n-4} de Σ' appartenant à l'hyperplan

$$\xi'_0 x'_0 + \xi'_1 x'_1 + \cdots + \xi'_n x'_n = 0.$$

On a, entre les éléments de $n+1$ lignes de la matrice (8), les relations

$$x_0 \varphi_{0k} + x_1 \varphi_{1k} + \cdots + x_n \varphi_{nk} + y_5 \xi'_k = 0.$$

Entre ces équations et l'équation

$$\xi_0 x_0 + \xi_1 x_1 + \cdots + \xi_n x_n = 0 \qquad (9)$$

éliminons les x et y_5 ; nous obtenons

$$\left\| \begin{matrix} \varphi_{00} & \varphi_{10} & \cdots & \varphi_{n0} & \xi'_0 \\ . & . & . & . & . \\ \varphi_{0n} & \varphi_{1n} & \cdots & \varphi_{nn} & \xi'_n \\ \xi_0 & \xi_1 & \cdots & \xi_n & 0 \end{matrix} \right\| = 0, \qquad (10)$$

équation qui représente dans S_3 une surface Φ, d'ordre n, correspondant point par point à la section de V_3 par l'hyperplan (9). On en conclut que la variété V_3 est rationnelle et représentable sur l'espace S_3 de manière qu'à ses sections hyperplanes correspondent les surfaces d'un système $|\Phi|$, ∞^n, dont la base est la courbe

$$\| \varphi_{0k} \; \varphi_{1k} \cdots \varphi_{nk} \; \xi'_k \| = 0, \qquad (k = 0, 1, \ldots, n) \qquad (11)$$

d'ordre $\frac{1}{2} n(n+1)$. Cette courbe est d'ailleurs une courbe C' tracée sur la surface F_0.

Deux surfaces Φ ont encore en commun, en dehors de la courbe (11), une courbe d'ordre $\frac{1}{2} n(n-1)$ s'appuyant en $\frac{1}{3}(n-1)\, n(n+1)$ points sur la courbe (11). Il en résulte que le degré du système $|\Phi|$, et par suite l'ordre de la variété V_3, sont égaux à $\frac{1}{6}(n-2)(n-1)n$.

Plus généralement, considérons les équations $(1 \leq r \leq n-3)$

$$\left\| \sum_i a_{ik} x_i \quad \sum_i b_{ik} x_i \quad \sum_i c_{ik} x_i \quad \sum_i d_{ik} x_i \quad \xi'_{1k} \quad \xi'_{2k} \dots \xi'_{rk} \right\| = 0,$$
$$(k = 0, 1, \dots, n).$$

Elles représentent une variété V_{r+2} à $r+2$ dimensions, lieu des points de Σ auxquels les réciprocités (1) font correspondre dans Σ' des espaces S_{n-4} coupant suivant des espaces à $n-r-3$ dimensions l'espace linéaire à $n-r$ dimensions représenté par

$$\sum_k \xi'_{1k} x'_k = 0, \quad \sum_k \xi'_{2k} x'_k = 0, \dots, \sum_k \xi'_{rk} x'_k = 0.$$

On peut toujours disposer de la figure de référence dans Σ' de manière à remplacer ces équations par

$$x'_{n-r+1} = 0, \quad x'_{n-r+2} = 0, \dots, x'_n = 0,$$

de sorte que la variété V_{r+2} soit représentée par les équations (2) où l'on fait $k = 0, 1, \dots, n-r$. Il en résulte que la variété V_{r+2} est d'ordre $\frac{1}{6}(n-r-1)(n-r)(n-r+1)$.

Toutes les variétés qui viennent d'être rencontrées contiennent F. En particulier, pour $r = n-3$, on obtient des hypersurfaces V_{n-1}, d'ordre quatre, passant par F.

4. Aux points de F les réciprocités (1) font correspondre des espaces à $n-3$ dimensions que nous désignerons par σ' et de même aux points de F' correspondent dans Σ des espaces S_{n-3} que nous désignerons par σ.

Nous pouvons supposer sans restriction que le point O'_n $(x'_0 = x'_1 = \dots = x'_{n-1} = 0)$ appartient à la surface F' et que l'espace σ qui lui correspond a pour équations $x'_{n-2} = x'_{n-1} = x'_n = 0$. A un point de σ les réciprocités (1) font correspondre des hyperplans passant par O'_n, et pour que ces quatre hyperplans aient en commun un espace σ', il faut et il suffit que l'on ait

$$\left\| \sum_i a_{ik}\, x_i \quad \sum_i b_{ik}\, x_i \quad \sum_i c_{ik}\, x_i \quad \sum_i d_{ik}\, x_i \right\| = 0,$$

$$(i = 0, 1, \ldots, n-3;\ k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Cette matrice s'annule pour $\frac{1}{6}(n-2)(n-1)n$ points et par conséquent les espaces σ s'appuient en $\binom{n}{3}$ points sur F. De plus, par un point de F' passent $\binom{n}{3}$ espaces σ'. De même, les espaces σ' s'appuient en $\binom{n}{3}$ points sur F' et par un point de F passent $\binom{n}{3}$ espaces σ.

Les ∞^2 espaces σ (ou σ') engendrent une hypersurface Ω (ou Ω') dont nous allons déterminer l'ordre.

Comme nous l'avons remarqué, aux points d'un espace σ correspondent dans Σ' des espaces S_{n-4} s'appuyant en un point sur F'. Si donc nous considérons une droite de Σ, et la variété engendrée par les espaces S_{n-4} de Σ' homologues des points de cette droite, l'ordre de Ω sera égal en nombre d'espaces S_{n-4} de cette variété qui s'appuient sur F', ou encore au nombre de points de rencontre de cette variété et de F'.

Considérons, dans Σ, la droite

$$x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 0.$$

Les espaces S_{n-4} qui correspondent aux points de cette droite engendrent une variété à $n-3$ dimensions représentée par

$$\left\| \begin{matrix} \sum_k a_{0k}\, x'_k & \sum_k b_{0k}\, x'_k & \sum_k c_{0k}\, x'_k & \sum_k d_{0k}\, x'_k \\ \sum_k a_{1k}\, x'_k & \sum_k b_{1k}\, x'_k & \sum_k c_{1k}\, x'_k & \sum_k d_{1k}\, x'_k \end{matrix} \right\| = 0. \qquad (12)$$

Cette variété est du quatrième ordre. Il s'agit de trouver les valeurs des x' qui annulent à la fois les matrices (3) et (12). Observons que pour un point commun à la variété (12) et à la surface F', tous les déterminants à seize éléments tirés de la matrice (4) et contenant les deux premières lignes sont nuls.

De plus, si tous les déterminants à seize éléments tirés de (4) et ne contenant par la première ligne sont nuls, tous les déterminants tirés de cette matrice sont nuls en vertu des équations (12).

La matrice (4), dont on a supprimé la première ligne, s'annule pour une variété à trois dimensions d'ordre $\binom{n}{3}$; cette variété rencontre la variété (12) en $4\binom{n}{3}$ points. Mais parmi ces points se trouvent ceux qui satisfont aux équations

$$\sum_k a_{1k}\, x'_k = 0, \quad \sum_k b_{1k}\, x'_k = 0, \quad \sum_k c_{1k}\, x'_k = 0, \quad \sum_k d_{1k}\, x'_k = 0, \qquad (13)$$

qui sont des solutions impropres. Les équations (13) représentent un espace S_{n-4} appartenant à la variété (12). Si l'on supprime dans la matrice (4) les deux premières lignes, on obtient une matrice qui s'annule pour une variété à quatre dimensions d'ordre $\binom{n-1}{3}$. Cette variété rencontre l'espace (13) en $\binom{n-1}{3}$ points. Il résulte de tout ceci que la variété Ω (et de même la variété Ω') est d'ordre $4\binom{n}{3} - \binom{n-1}{3} = \frac{1}{2}(n-2)(n-1)(n+1)$.

5. Nous avons vu que les surfaces F, F′ sont birationnellement identiques à la surface F_0 d'équation (5). La surface F_0, d'ordre $n+1$, est en général dépourvue de points multiples et par suite ses genres sont

$$p_a = p_g = \binom{n}{3}, \quad p^{(1)} = (n+1)(n-3)^2 + 1.$$

De ce qui précède, on conclut que

Dans un espace linéaire S_n *à* n *dimensions, une matrice à* $n+1$ *lignes et quatre colonnes de formes linéaires s'annule pour les points d'une surface* F *d'ordre* $\binom{n+1}{3}$, *de genres* $p_a = p_g = \binom{n}{3}$, $p^{(1)} = (n+1)\,(n-3)^2 + 1$. *Il existe* ∞^2

espaces linéaires à n -3 *dimensions s'appuyant en* $\binom{n}{3}$ *points sur* F *et formant une hypersurface* Ω *d'ordre* $\frac{1}{2}(n-2)(n-1)(n+1)$, *pour laquelle la surface est multiple d'ordre* $\binom{n}{3}$.

6. Envisageons les cas particuliers $n=4$ et $n=5$.

Si $n=4$, les réciprocités (1) déterminent une correspondance birationnelle entre les espaces Σ, Σ'; les surfaces F, F' sont les surfaces fondamentales de cette correspondance. Les espaces σ (ou σ') sont des droites s'appuyant en quatre points sur F (ou F') et ces droites engendrent une variété à trois dimensions Ω (ou Ω') d'ordre quinze. Les surfaces F, F' sont de genres $p_a=p_g=4$, $p^{(1)}=6$.

Si $n=5$, les réciprocités (1) font correspondre aux points de l'un des espaces Σ, Σ' des droites de l'autre. Les surfaces F, F' sont d'ordre vingt et de genres $p_a=p_g=10$, $p^{(1)}=25$. Les espaces σ, σ' sont des plans s'appuyant en dix points sur F ou F'; les variétés Ω, Ω' sont d'ordre 36 et possèdent comme surface multiple d'ordre dix les surfaces F ou F'.

Deux plans σ ne se rencontrent pas en général, mais il y a ∞^1 plans σ rencontrant un plan σ déterminé. Supposons que le point $O'_5(0, 0, 0, 0, 0, 1)$ appartienne à la surface F' et ait comme homologue dans Σ le plan σ_0 d'équations $x_3=x_4=x_5=0$. Cela implique que les termes en $x_0x'_5$, $x_1x'_5$, $x_2x'_5$ manquent dans les équations (1). Aux points du plan σ_0 correspondent dans Σ' des droites passant par O'_5 (et en particulier aux dix points d'appui de σ_0 sur F correspondent dix plans σ' passant par O'_5). Aux points de σ_0 appartenant à un second plan σ correspondent des droites passant par O'_5 et s'appuyant une seconde fois sur F'. Cherchons le nombre de ces points qui appartiennent à la droite $x_2=x_3=x_4=x_5=0$.

Les droites qui correspondent aux points de cette droite forment un cône V_2^4 du quatrième ordre, de sommet O'_5, d'équations

$$\left\| \begin{matrix} \sum_k a_{0k}\, x'_k & \sum_k b_{0k}\, x'_k & \sum_k c_{0k}\, x'_k & \sum_k d_{0k}\, x'_k \\ \sum_k a_{1k}\, x'_k & \sum_k b_{1k}\, x'_k & \sum_k c_{1k}\, x'_k & \sum_k d_{1k}\, x'_k \end{matrix} \right\| = 0,$$

$$(k = 0, 1, 2, 3, 4).$$

Le nombre cherché est égal au nombre de points de rencontre de ce cône, en dehors de O'_5, avec la surface F', dont les équations

$$\| \sum_k a_{ik}\, x'_k \quad \sum_k b_{ik}\, x'_k \quad \sum_k c_{ik}\, x'_k \quad \sum_k d_{ik}\, x'_k \| = 0,$$

$$(i = 0, 1, 3, 4, 5)$$

présentent actuellement la particularité suivante : dans les trois premières lignes, le terme en x'_5 manque. En répétant le raisonnement fait plus haut, on voit que F' et V_2^4 ont en commun 36 points. Pour notre objet, il faut défalquer le nombre de ces points absorbés par O'_5. O'_5 est quadruple pour V_2^4, simple pour F' et pour la variété V_3^{10} obtenue en supprimant dans l'équation de F' la première ligne D'autre part, O'_5 appartient à la droite obtenue en égalant à zéro les termes de la seconde ligne de la matrice; il appartient aussi à la variété V_2^4 obtenue en supprimant les deux premières lignes de la matrice. Par suite O'_5 compte pour trois dans les solutions trouvées et le lieu des points communs à σ_0 et à d'autres plans σ est une courbe d'ordre 33. Les dix points d'appui du plan σ_0 sur la surface F sont d'ailleurs multiples d'ordre neuf pour cette courbe.

7. Supposons $n > 5$. Deux espaces σ ont en commun un espace linéaire à $n - 6$ dimensions. Les ∞^2 espaces σ découpent, sur l'un d'entre eux, σ_0, une variété à $n - 4$ dimensions. L'ordre de cette variété se détermine comme dans le cas $n = 5$. On supposera que le point $O'_n(0, 0, \ldots, 0, 1)$ appartient à F' et qu'il lui correspond, dans Σ, l'espace σ_0 d'équations

$x_{n-2} = x_{n-1} = x_n = 0$. Cela implique l'absence dans les équations (1), des termes en $x_0 x'_n$, $x_1 x'_n$, ..., $x_{n-3} x'_n$. Il est alors facile de voir que les espaces à $n - 6$ dimensions, découpés par les espaces σ sur l'un d'entre eux, σ_0, forment une variété à $n - 4$ dimensions d'ordre $\frac{1}{2}(n-2)(n-1)(n+1) - 3$, pour laquelle les $\binom{n}{3}$ points d'appui de σ_0 sur F sont multiples d'ordre $\binom{n}{3} - 1$ [1].

Liége, 31 octobre 1935.

---

[1] On remarquera que ce raisonnement s'applique également au cas $n=4$. Il y a douze droites σ s'appuyant sur une droite σ_0, mais ce sont précisément les quatre groupes de trois droites σ, distinctes de σ_0, passant par les quatre points d'appui de σ_0 sur F. Ces points d'appui sont triples pour le groupe de douze points trouvé.