EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége*, N° 12, 1935.

Une observation sur les variétés algébriques à trois dimensions dont les surfaces canonique et pluricanoniques sont d'ordre zéro,

par LUCIEN GODEAUX, Membre de la Société.

Considérons une variété algébrique V, à trois dimensions, dont les surfaces canonique et pluricanoniques sont d'ordre zéro. Un système linéaire infini |F|, quelconque, de surfaces F appartenant à V, est son propre adjoint; on serait tenté d'en conclure que toute surface tracée sur V possède un système canonique et que son genre géométrique est au moins égal à l'unité. Il n'en est cependant rien, comme nous allons le montrer sur un exemple.

1. Soit V une variété algébrique à trois dimensions, d'irrégularité superficielle nulle, dont les surfaces canonique et pluricanoniques sont d'ordre zéro; la variété V a par suite le genre géométrique $P_g=1$ et les plurigenres $P_2=1$, $P_3=1$, ... (1). Un système linéaire |F|, de surfaces F tracées sur V, irréductible, ∞^1 au moins, est son propre adjoint et sa surface générique est en général régulière.

Supposons que V soit transformée en elle-même par une transfomation birationnelle T, de période p, p étant un nombre premier. Soit I_p l'involution engendrée sur V par T. Supposons en outre que I_p soit dépourvue de points unis.

Construisons sur V un système linéaire |F|, transformé en lui-même par T, simple et dépourvu de points-base (2). Le système |F| contient un certain nombre de systèmes linéaires partiels composés au moyen de l'involution I_p. En remplaçant éventuellement |F| par un de ses multiples convenablement choisi, on peut s'arranger de manière à ce que le nombre de ces systèmes partiels composés au moyen de I_p soit précisément p et que ces systèmes aient la même dimension. Désignons ces systèmes par $|F_1|$, $|F_2|$, ..., $|F_p|$.

(1) Sur la théorie des variétés algébriques à trois dimensions, consulter : F. SEVERI, Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche (*Rend. Circolo Matem. Palermo*, 1909, t. 28, pp. 33-87); B. SEGRE, Nuovi contributi alla Geometrie sulle varietà algebriche (*Memorie della R. Acc. d'Italia*, 1934, t. V, pp. 479-576).

(2) On établit ces propriétés comme dans le cas des surfaces algébriques. Voir, à ce sujet, notre opuscule : « Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique ». (*Actualités scientif. et industr.*, Exposés de Géométrie, publiés sous la direction de M. CARTAN. Paris, Hermann, 1935, 45 p.)

Soit Ω une variété algébrique image de l'involution I_p. Aux systèmes $|F_1|$, $|F_2|$, ..., $|F_p|$ correspondent sur cette variété des systèmes linéaires complets de surfaces $|\Phi_1|$, $|\Phi_2|$, ..., $|\Phi_p|$.

Si p_g est le genre géométrique des surfaces F, le système $|F|$ a la dimension p_g. Sur une surface F_1 par exemple, le système canonique est découpé par les surfaces F et contient p systèmes linéaires composés au moyen de I_p; ces systèmes sont découpés sur la surface F_1 considérée par les surfaces des systèmes $|F_1|$, $|F_2|$, ..., $|F_p|$. Nous avons montré qu'au système canonique d'une surface Φ_1 correspond, sur la surface F_1 homologue, celui des systèmes de courbes canoniques composés au moyen de I_p qui a la dimension minimum [1]. Il en résulte que ce sont les surfaces F_1 qui découpent sur l'une d'entre elles le système transformé du système canonique de la surface Φ_1 correspondante. Par suite, $|\Phi_1|$ est son propre adjoint et, pour la même raison, il en est de même de $|\Phi_2|$, $|\Phi_3|$, ..., $|\Phi_p|$. On a donc

$$|\Phi_1'| = |\Phi_1|, \qquad |\Phi_2'| = |\Phi_2|, ..., |\Phi_p'| = |\Phi_p|.$$

Le genre géométrique et les plurigenres de la variété Ω sont égaux à l'unité.

Si une variété algébrique à trois dimensions dont les surfaces canonique et pluricanoniques sont d'ordre zéro possède une involution cyclique d'ordre premier p *privée de points unis*, *les surfaces canonique et pluricanoniques de la variété image de cette involution sont aussi d'ordre zéro.*

2. Appliquons le résultat précédent au cas particulier de la variété à trois dimensions du cinquième ordre de l'espace à quatre dimensions S_4, transformée en elle-même par l'homographie cyclique T de période cinq ayant cinq points unis A_1, A_2, ..., A_5 n'appartenant pas à V. Nous désignerons par $|F|$ le système des sections hyperplanes de V, système transformé en lui-même par T.

Soient α_1, α_2, ..., α_5 les hyperplans faces de la pyramide A_1, A_2, ..., A_5 respectivement opposés à A_1, A_2, ..., A_5. Le système $|F|$ contient cinq surfaces transformées en elles-mêmes par T; ce sont les sections de V par les hyperplans α_1, α_2, ..., α_5. Nous désignerons ces surfaces respectivement par F_1, F_2, ..., F_5 et les

---

[1] Sur les involutions cycliques dépourvues de points unis, appartenant à une surface algébrique régulière. (*Bull. de l'Acad. roy. de Belg.*, 1932, pp. 672-679.)

surfaces qui leur correspondent sur la variété Ω image de l'involution I_5, par Φ_1, Φ_2, ..., Φ_5.

Le système $|5F|$ est transformé en lui-même par T; il a la dimension 124 et contient cinq systèmes linéaires partiels, de dimension 24, composés au moyen de l'involution I_5. L'un de ces systèmes contient les surfaces $F_1, F_2, \ldots, F_5$ comptées chacune cinq fois et en outre la surface $F_1+F_2+\ \ldots\ +F_5$; il est découpé sur V par les hypersurfaces d'ordre cinq, unies pour l'homographie T et qui ne passent par aucun des points unis de cette homographie (système auquel appartient V). En rapportant projectivement les surfaces du système considéré aux hyperplans d'un espace S_{24}, il correspond à V un modèle projectif de Ω, variété d'ordre 5^3, dont nous désignerons les sections hyperplanes par Ψ.

D'après ce qui précède, nous avons

$$\Psi \equiv 5\Phi_1 \equiv 5\Phi_2 \equiv \cdots \equiv 5\Phi_5,$$
$$\Psi \equiv \Phi_1 + \Phi_2 + \cdots + \Phi_5.$$

En d'autres termes, il existe un hyperplan ayant un contact du quatrième ordre avec Ω en tout point d'une surface Φ_i et d'autre part, les surfaces Φ_1, ..., Φ_5 appartiennent à un même hyperplan.

Si nous désignons par Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3, Ψ_4 les surfaces de Ω qui correspondent aux surfaces des quatre derniers systèmes partiels de $|5F|$ composés au moyen de I_5, nous avons

$$|\,5\Psi\,| \equiv |\,5\Psi_1\,| \equiv \cdots \equiv |\,5\Psi_4\,|.$$

3. Le système $|2F|$ découpé sur V par les hyperquadriques de S_4 contient cinq réseaux composés au moyen de I_5. Prenons dans S_4 la pyramide $A_1\ A_2\ \ldots\ A_5$ comme figure de référence; l'homographie T peut alors être représentée par les équations

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 : x'_5 = x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^2 x_3 : \varepsilon^3 x_4 : \varepsilon^4 x_5,$$

où ε est une racine primitive cinquième de l'unité. Les cinq réseaux de surfaces de $|2F|$ composés au moyen de I_5 comprennent alors le premier les surfaces $2F_1$, F_2+F_5, F_3+F_4; le second, les surfaces $2F_2$, F_1+F_3, F_4+F_5; le troisième, $2F_3$, F_1+F_5, F_2+F_4; le quatrième, $2F_4$, F_1+F_2, F_3+F_5; enfin le cinquième $2F_5$, F_1+F_4, F_2+F_3. A ces réseaux correspondent sur Ω cinq réseaux

$$|\,2\Phi_1\,| = |\,\Phi_2+\Phi_5\,| = |\,\Phi_3+\Phi_4\,|, \quad |\,2\Phi_2\,| = |\,\Phi_1+\Phi_3\,| = |\,\Phi_4+\Phi_5\,|,$$
$$|\,2\Phi_3\,| = |\,\Phi_1+\Phi_5\,| = |\,\Phi_2+\Phi_4\,|, \quad |\,2\Phi_4\,| = |\,\Phi_1+\Phi_2\,| = |\,\Phi_3+\Phi_5\,|,$$
$$|\,2\Phi_5\,| = |\,\Phi_1+\Phi_4\,| = |\,\Phi_2+\Phi_3\,|.$$

Nous avons démontré que les surfaces $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_5$ sont dépourvues de courbes canoniques, mais possèdent un faisceau de courbes bicanoniques [1]. Ces surfaces ont les caractères $p_a = p_g = 0$, $P_2 = 2$, $P_3 = 4$, ..., $p^{(1)} = 2$. Il résulte de nos recherches que sur la surface Φ_i, les courbes bicanoniques sont découpées par le réseau $|2\Phi_i|$.

Sur une surface quelconque de Ω, le système bicanonique est découpé par le double du système déterminé par cette surface. On est donc conduit à la relation fonctionnelle

$$|\Phi'_i| = |\Phi_i|,$$

c'est-à-dire que la surface isolée Φ_i est sa propre adjointe, bien que le système canonique de Φ_i n'existe pas.

Une variété algébrique à trois dimensions dont les surfaces canonique et pluricanoniques sont d'ordre zéro, peut contenir des surfaces dépourvues de courbes canoniques.

Liége, le 4 décembre 1935.

---

(1) Sur une surface algébrique de genres zéro et de bigenre deux (*Rend. R. Accad. Lincei*, déc. 1931, pp. 479-481); Sur les surfaces algébriques de genres arithmétique et géométrique zéro dont le genre linéaire est égal à deux (*Bull. de l'Acad. roy. de Belg.*, 1932, pp. 26-37); Sur les surfaces algébriques non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls (*Actualités scientif.* Paris, Hermann, 1934, 33 p.).

M. HAYEZ, imprimeur de l'Académie royale de Belgique, 112, rue de Louvain, Bruxelles.