Sur les involutions du second ordre de l'espace,

par LUCIEN GODEAUX, Correspondant de l'Académie.

(*Quatrième note*) [1].

Dans cette note, nous considérons une involution du second ordre engendrée par une transformation birationnelle du septième ordre, ayant une seule courbe fondamentale de première espèce d'ordre huit et de genre cinq. Cette involution a été rencontrée par Montesano [2], qui en a déterminé les caractères projectifs; elle possède une courbe unie d'ordre huit et de genre cinq. M. Snyder [3] a repris récemment l'étude de cette involution et a montré qu'elle pouvait être représentée par une variété obtenue en considérant les systèmes linéaires de surfaces du huitième ordre, passant doublement par la courbe fondamentale, composés au moyen de l'involution. Nous montrons ici que l'involution peut être représentée par l'hypersurface du quatrième ordre de l'espace à quatre dimensions, enveloppe d'un système simplement infini, d'indice

---

(1) Les notes précédentes ont paru dans les *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique* (Cl. des Sc.), 1931, pp. 516-526, 991-1000; 1934, pp. 408-414.

(2) MONTESANO, Una estensione del problema della proiettività a gruppi di complessi e di congruenze di rette. (*Annali di Matematica*, s. 3, t. I, 1898, pp. 313-358.)

Observons que d'après la formule de postulation de M. Castelnuovo, les surfaces du septième ordre passant doublement par une courbe d'ordre huit et de genre cinq sont en nombre ∞^3. Ces surfaces passent par les dix quadrisécantes de la courbe et forment un système homaloïdal. Il serait intéressant de voir si toute involution obtenue au moyen de ce système est du type de Montesano.

(3) SNYDER, On an involutorial transformation found by Montesano (*Annals of Mathematics*, 1930, pp. 335-343.)

deux, d'hyperquadriques passant par une courbe (canonique) d'ordre huit et de genre cinq. L'involution peut également être représentée par un espace double dont la surface de diramation, du sixième ordre, est rationnelle et est l'enveloppe d'un système ∞^1 d'indice deux de surfaces cubiques passant par une courbe d'ordre sept et de genre cinq. L'hypersurface du quatrième ordre dont il vient d'être question possède comme courbe double ordinaire la courbe du huitième ordre commune à toutes les hyperquadriques du système dont elle est l'enveloppe. Les caractéristiques de ces hyperquadriques sont des surfaces rationnelles du quatrième ordre, à sections hyperplanes elliptiques, formant un faisceau sur l'hypersurface. Celle-ci contient en outre ∞^1 congruences linéaires de courbes rationnelles.

1. Rappelons tout d'abord les propriétés de l'involution I_2 de Montesano qui nous seront nécessaires pour la suite.

La transformation birationnelle T, génératrice de l'involution, fait correspondre aux plans de l'espace des surfaces Φ, d'ordre sept, ayant comme courbe double une courbe Γ du huitième ordre et de genre cinq. La courbe Γ est la seule courbe fondamentale de première espèce de T. Les surfaces Φ forment un système homaloïdal et passent simplement par les dix quadrisécantes $r_1, r_2, \ldots, r_{10}$ de la courbe Γ. Ces dix droites sont fondamentales de seconde espèce pour T ; à tout point de la droite r_{2i+1}, T fait correspondre tout point de la droite r_{2i+2} $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$ et inversement. A une droite de l'espace, T fait correspondre une courbe φ du septième ordre, s'appuyant en 24 points sur la courbe Γ (mais ne rencontrant pas $r_1, r_2, \ldots, r_{10}$).

La droite joignant deux points d'un groupe de I_2 engendre un complexe linéaire Σ. Chaque droite de Σ porte trois couples de I_2. La courbe φ transformée d'une droite r s'appuie en six points sur la conjuguée r' de r par rapport à Σ.

Aux points infiniment voisins d'un point P de Γ correspondent les points d'une conique s'appuyant en sept points sur Γ et dont le plan passe par P. Le lieu de ces coniques est la surface fondamentale de T, jacobienne du système $|\Phi|$, d'ordre 24; cette surface possède Γ comme courbe multiple d'ordre sept et les droites $r_1, r_2, \ldots, r_{10}$ comme droites quadruples.

L'involution I_2 possède ∞^1 points unis, formant une courbe Δ d'ordre huit et de genre cinq, s'appuyant en 24 points sur la courbe Γ mais ne rencontrant pas les droites $r_1, r_2, \ldots, r_{10}$.

2. En désignant par ϖ les plans de l'espace, considérons le système complet de surfaces

$$| F | = | \varpi + \Phi |.$$

Les surfaces F sont d'ordre huit, possèdent Γ comme courbe double et $r_1, r_2, \ldots, r_{10}$ comme droites simples. Parmi les surfaces F se trouvent les surfaces formées d'un plan ϖ et de la surface Φ que T lui fait correspondre; de telles surfaces sont transformées en elles-mêmes par T et, par suite, le système $|F|$ est transformé en lui-même par T.

Le système $|F|$ contient deux systèmes linéaires partiels composés au moyen de l'involution I_2. Le premier de ces systèmes contient les surfaces formées d'un plan et de la surface Φ que T lui fait correspondre; ses surfaces rencontrent la courbe unie Δ en seize points variables.

Le second système linéaire partiel composé au moyen de I_2 comprend les surfaces F engendrées de la manière suivante : soit s une droite; aux plans passant par s correspondent des surfaces Φ formant un faisceau projectif au faisceau de plans considéré. Le lieu des courbes communes aux éléments homologues de ces deux faisceaux projectifs est une surface F transformée en elle-même par T. Cette surface contient la courbe unie Δ. Le second système linéaire partiel formé de surfaces F et composé au moyen de I_2 a donc Δ comme courbe-base.

3. Le système linéaire $|F|$ étant transformé en lui-même par T, il en est de même de son adjoint $|F'|$. Les surfaces F′ sont des surfaces du quatrième ordre, passant simplement par la courbe Γ (mais non par les droites $r_1, r_2, \ldots, r_{10}$).

Les surfaces du quatrième ordre de l'espace sont en nombre ∞^{34}; elles découpent sur la courbe Γ une série linéaire d'ordre 32, non spéciale et par suite de dimension 27. Il en résulte qu'il existe ∞^6 surfaces du quatrième ordre contenant Γ; le système $|F'|$ a donc la dimension six.

Les surfaces F′ découpent, sur la courbe Δ, une série linéaire d'ordre huit dont la dimension est égale à trois ou à quatre, suivant que cette série est non spéciale ou est la série canonique. Dans tous les cas, il y a au moins ∞^1 surfaces F′ contenant Δ. D'un autre côté, les surfaces F′ contenant Γ et Δ forment au plus un faisceau. Il existe dont, dans $|F'|$, un faisceau, que nous désignerons par $|F'_1|$, de surfaces contenant Δ et les autres surfaces F′ découpent, sur Δ, les groupes de la série canonique de cette courbe.

La transformation T détermine, dans le système $|F'|$, une homographie involutive agissant sur les surfaces F′ considérées comme éléments (cette homographie pouvant d'ailleurs être l'identité si toute surface F′ est transformée en elle-même par T). Il existera certainement une surface F′, ne contenant pas Δ, transformée en elle-même par T; soit F'_0 cette surface. Sur F'_0, T détermine une involution I'_2 d'ordre deux ayant comme points unis les huit points de rencontre de F'_0 et de Δ; par conséquent l'involution I'_2 est de genres un ($p_a = P_4 = 1$) comme la surface F'_0. Sur F'_0, les surfaces F′ découpent un système linéaire de degré huit, de genre cinq et de dimension cinq, qui contient deux systèmes linéaires partiels composés au moyen de I'_2 (1). L'un de ces systèmes est un faisceau ayant

(1) L. Godeaux, Mémoire sur les involutions appartenant à une surface de genres un. (*Annales de l'École normale sup.*, 1915, pp. 357-430; 1919, pp. 51-70.)

pour points-base les huit points unis de I'_2; il est découpé sur F'_0 par les surfaces F'_1. L'autre système a la dimension trois et est dépourvu de points-base. On en conclut que $|F'|$ contient deux systèmes linéaires partiels composés au moyen de l'involution I_2 : l'un est le faisceau $|F'_1|$, l'autre, de dimension quatre et que nous désignerons par $|F'_0|$, n'a pas de points-base en dehors la courbe Γ.

Le système complet $|F'|$ est simple.

4. Rapportons projectivement les surfaces F' aux hyperplans d'un espace linéaire S_6 à six dimensions. Aux points de l'espace correspondent ceux d'une variété V, à trois dimensions et d'ordre huit, dont les sections hyperplanes correspondent aux surfaces F'. Nous continuerons à désigner par F' ces surfaces-sections.

A l'homographie déterminée par T entre les surfaces F' correspond une homographie H de S_6, transformant V en en elle-même. Puisque $|F'|$ contient deux systèmes linéaires partiels composés au moyen de I_2, l'un ∞^4, l'autre ∞^1, les axes ponctuels de l'homographie H sont une droite σ_1 ne rencontrant pas V et un espace linéaire à quatre dimensions σ_4 coupant V suivant la courbe qui correspond à Δ et que nous désignerons encore par Δ. Les hyperplans de S_6 passant par la droite σ_1 découpent sur V les surfaces F'_0; ceux qui passent par σ_4 découpent sur V les surfaces F'_1.

Pour obtenir une variété image de l'involution I_2, rapportons projectivement les hyperplans de S_6 passant par σ_1 aux hyperplans d'un espace linéaire S_4 à quatre dimensions. A la variété V correspond une variété Ω de S_4, à trois dimensions et d'ordre quatre, image de I_2. Nous désignerons par Δ' la courbe de Ω qui correspond à Δ.

Les sections hyperplanes F' de V sont de genres un ($p_a = P_4 = 1$). Sur une surface F'_0, on a une involution I'_2 possédant huit points unis ; par conséquent, la section hyperplane Ψ de Ω qui correspond à cette surface F'_0 est de genres un $(p_a = P_4 = 1)$ et a des points doubles coniques aux huit points où elle rencontre la courbe Δ'. On en conclut que la variété Ω ne possède pas de surface double, mais que la courbe Δ' est double ordinaire pour cette variété. De plus, Δ' est d'ordre huit et ses huit points d'intersection avec un hyperplan appartiennent à ∞^2 quadriques de cet hyperplan [1]; par conséquent, la courbe Δ' est la base d'un réseau d'hyperquadriques de S_4.

Aux surfaces F'_1 correspondent, sur Ω, des surfaces Ψ_1 du quatrième ordre, à sections hyperplanes elliptiques. En effet, sur la section hyperplane d'une surface F'_1, H détermine une involution ayant huit points unis et par suite elliptique. Les surfaces Ψ_1 forment un faisceau $|\Psi_1|$. On sait que la section hyperplane Ψ de Ω est l'enveloppe d'un système α^1 d'indice deux de quadriques [2]; les surfaces Ψ_1 découpent, sur une surface Ψ, les biquadratiques gauches caractéristiques de cette enveloppe. Les surfaces Ψ_1 passent simplement par la courbe Δ'.

5. Chacun des points doubles coniques d'une section hyperplane Ψ de Ω est équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à une conique de degré — 2. Par conséquent, la courbe Δ' équivaut, au point de vue des transformations birationnelles, à une surface que nous désignerons encore par Δ'. Cette surface contient un faisceau, de genre cinq, de coniques.

Cela étant, considérons sur V une surface F' non transformée en elle-même par H. Il lui correspond sur Ω une surface $\overline{\Psi}$ appartenant totalement à un système linéaire $|\overline{\Psi}|$. Faisons varier F' d'une manière continue dans $|F'|$ jusqu'à ce qu'elle vienne coïncider avec une surface F'_0. La surface $\overline{\Psi}$ varie

(1) L. Godeaux, *loc. cit.*, chap. VII (1919).

(2) Id., *ibid.*, chap. VII (1919).

d'une manière continue et vient coïncider avec une surface Ψ comptée deux fois. On a donc

$$|\overline{\Psi}| = |2\Psi|.$$

Faisons ensuite varier F' d'une manière continue dans $|F'|$, jusqu'à ce qu'elle vienne coïncider avec une surface F'_1. La surface $\overline{\Psi}$ correspondante se réduit à l'ensemble de la surface Δ' et d'une surface Ψ_1 comptée deux fois. On a donc

$$|\overline{\Psi}| = |2\Psi_1 + \Delta'|$$

et par conséquent

$$|2\Psi| = |2\Psi_1 + \Delta'|.$$

De ces relations fonctionnelles, il résulte que les surfaces $\overline{\Psi}$ sont découpées sur Ω par les hyperquadriques de S_6 et que *la variété Ω, image de l'involution I_2, est la variété du quatrième ordre, enveloppe d'un système ∞^1 d'indice deux d'hyperquadriques de S_4, ayant comme base une courbe d'ordre huit et de genre cinq.*

Si

$$\varphi_1(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \qquad \varphi_3 = 0$$

sont les équations de trois hyperquadriques de S_4, se rencontrant suivant une courbe irréductible d'ordre huit, la variété Ω a pour équation

$$\varphi_2^2 - \varphi_1\varphi_3 = 0$$

et est l'enveloppe du système

$$\lambda^2\varphi_1 + 2\lambda\varphi_2 + \varphi_3 = 0.$$

Une surface Ψ_1 est la base d'un faisceau d'hyperquadriques. Les hyperquadriques passant par une surface Ψ_1 rencontrent encore la variété Ω suivant les autres surfaces du faisceau $|\Psi_1|$. D'ailleurs, Ω est le lieu des surfaces Ψ_1 représentées par les équations

$$\varphi_1 - \mu\varphi_2 = 0, \qquad \varphi_2 - \mu\varphi_3 = 0,$$

lorsque μ varie.

6. Pour obtenir la représentation de la variété Ω sur un espace double, projetons cette variété sur un espace à trois dimensions σ à partir d'un point de la courbe Δ'. Sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer que le centre de projection est le point $(0, 0, 0, 0, 1)$ et que l'espace σ a pour équation $x_4 = 0$. Nous écrirons donc

$$\varphi_1 \equiv x_4 \alpha_1 (x_0, x_1, x_2, x_3) + \alpha_2 (x_0, x_1, x_2, x_3) = 0,$$
$$\varphi_2 \equiv x_4 \beta_1 + \beta_2 = 0, \qquad \varphi_3 \equiv x_4 \gamma_1 + \gamma_2 = 0,$$

où les α, β, γ sont des formes dont le degré est indiqué par l'indice.

L'équation de Ω devient

$$x_4^2(\beta_1^2 - \alpha_1\gamma_1) + x_4(2\beta_1\beta_2 - \alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1) + \beta_2^2 - \alpha_2\gamma_2 = 0.$$

La surface de diramation de l'espace σ a pour équation

$$(2\beta_1\beta_2 - \alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1)^2 - 4(\beta_1^2 - \alpha_1\gamma_1)(\beta_2^2 - \alpha_2\gamma_2) = 0.$$

Nous désignerons cette surface par K.

A la surface Ψ_1 découpée sur Ω par l'hyperquadrique

$$x_4(\lambda^2\alpha_1 + 2\lambda\beta_1 + \gamma_1) + \lambda^2\alpha_2 + 2\lambda\beta_2 + \gamma_2 = 0$$

correspond la surface cubique Ψ_1^* d'équation

$$\begin{vmatrix} 1 & -\lambda & \lambda^2 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Les surfaces Ψ_1^* passent par la courbe Δ'', d'ordre sept et de genre cinq, d'équations

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{matrix} \right\| = 0,$$

projection de la courbe Δ'. L'enveloppe des surfaces Ψ_1^* a pour équation

$$(\gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1)^2 - 4(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1) = 0$$

et coïncide, comme on le voit par un calcul simple, avec la surface de diramation K.

Deux surfaces Ψ_1^* ont en commun, en dehors de Δ'', une conique ψ^* dont nous allons déterminer l'origine. Considérons les surfaces Ψ_1 découpées sur Ω par les hyperquadriques

$$\lambda^2\varphi_1 + 2\lambda\varphi_2 + \varphi_3 = 0, \qquad \mu^2\varphi_1 + 2\mu\varphi_2 + \varphi_3 = 0. \tag{1}$$

Ces surfaces Ψ_1 appartiennent à l'hyperquadrique

$$\lambda\mu\varphi_1 + (\lambda + \mu)\varphi_2 + \varphi_3 = 0.$$

Observons maintenant que l'équation de la variété Ω peut s'écrire

$$[\lambda\mu\varphi_1 + (\lambda + \mu)\varphi_2 + \varphi_3]^2 -$$
$$[\lambda^2\varphi_1 + 2\lambda\varphi_2 + \varphi_3]\,[\mu^2\varphi_1 + 2\mu\varphi_2 + \varphi_3] = 0.$$

Cela étant, la conique commune aux deux surfaces Ψ_1^* homologues des surfaces Ψ_1 considérées a pour équations

$$\lambda\mu\alpha_1 + (\lambda + \mu)\beta_1 + \gamma_1 = 0, \qquad \lambda\mu\alpha_2 + (\lambda + \mu)\beta_2 + \gamma_2 = 0.$$

Dans l'espace S_4, ces deux équations représentent un cône quadratique ayant pour sommet le centre de projection ; ce cône coupe chacune des hyperquadriques (1) suivant une biquadratique rationnelle (ayant un point double au centre de projection).

Ainsi donc, à une conique ψ^* commune à deux surfaces Ψ_1^* correspondent, sur Ω, deux biquadratiques rationnelles ayant un point double en $O_4(0, 0, 0, 0, 1)$. On sait du reste que les coniques ψ^* s'appuient en six points sur Δ''. Or, cette courbe est double pour la surface de diramation K, d'ordre six ; les coniques ψ^* ne rencontrent donc pas K en dehors de Δ''.

La surface K, étant l'enveloppe des surfaces Ψ_1^*, est le lieu des coniques

$$\lambda^2\alpha_1 + 2\lambda\beta_1 + \gamma_1 = 0, \qquad \lambda^2\alpha_2 + 2\lambda\beta_2 + \gamma_2 = 0,$$

caractéristiques de ces surfaces. Sur K, ces coniques forment un faisceau rationnel et par suite la surface K est rationnelle.

L'involution I_2 peut être représentée par un espace double dont la surface de diramation est une surface rationnelle du sixième ordre, passant doublement par une courbe du septième ordre et de genre cinq.

7. D'après ce qu'on vient de voir, le cône quadratique

$$\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\beta_1 + \lambda_3\gamma_1 = 0, \qquad \lambda_1\alpha_2 + \lambda_2\beta_2 + \lambda_3\gamma_2 = 0$$

coupe la variété Ω suivant deux courbes gauches rationnelles du quatrième ordre, ayant un point double en O_4 et que nous désignerons par ψ. Ces deux courbes appartiennent aux surfaces Ψ_1, le long desquelles Ω est touchée par les hyperquadriques du système

$$\lambda^2\varphi_1 + 2\lambda\varphi_2 + \varphi_3 = 0,$$

où λ est racine de l'équation

$$\lambda_1 - \lambda\lambda_2 + \lambda^2\lambda_3 = 0.$$

Sur une surface Ψ_1, il existe ∞^1 courbes ψ formant un faisceau, et par suite les courbes ψ forment une congruence linéaire. Le même raisonnement pouvant être répété pour tout point de la courbe Δ', on en conclut que *la variété Ω contient ∞^1 congruences linéaires de courbes rationnelles*.

L'existence d'une surface unisécante des courbes ψ permettrait de démontrer la rationnalité de la variété Ω. Observons qu'à une telle surface correspondrait nécessairement une surface de σ bisécante des coniques ψ^*, car on sait qu'il ne peut exister de surfaces unisécantes de ces coniques([1]). On en conclut que l'existence de surfaces unisécantes des courbes ψ sur Ω exige celle de surfaces d'ordre $3\nu + 1$, passant ν fois par la courbe Δ'' et touchant K en tout point de rencontre en dehors de Δ'' ([2]).

Liége, le 2 novembre 1934.

([1]) MONTESANO, Su le congruenze lineari di coniche nello spazio. (*Rend. R. Istituto Lomb.*, 1893.)

([2]) Aux quadrisécantes r_1, r_2, ..., r_{10} de Γ correspondent des points doubles coniques de V, et par suite Ω possède cinq points doubles coniques isolés.