Extrait des *Bulletins de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences)
Séance du 14 décembre 1934, n° 12.

Sur les surfaces algébriques de genres zéro ayant des courbes tricanoniques elliptiques,

par Lucien GODEAUX, Correspondant de l'Académie.

Les surfaces algébriques non rationnelles dont les genres arithmétique et géométrique sont nuls ont fait récemment l'objet de nouvelles recherches [1]. Nous avons pu construire une surface de cette catégorie dont les courbes tricanoniques sont les courbes elliptiques d'un faisceau [2]. Cette surface contient deux courbes elliptiques isolées C_1, C_2 telles que $C_1' = 2C_2$, $C_2' = 2C_1$. Les courbes $3C_1$, $3C_2$ sont équivalentes et sont précisément des courbes tricanoniques de la surface. Dans cette nouvelle note, nous considérons les surfaces dont les courbes tricanoniques sont formées d'une partie fixe et d'une partie irréductible, elliptique, variable dans un faisceau. Nous démontrons que ce faisceau contient soit deux, soit trois courbes multiples et déterminons dans chaque cas la ou les courbes bicanoniques de la surface, ainsi que la composante

(1) Nous avons exposé ces recherches dans une monographie : « Les surfaces algébriques non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls » (*Actualités scientifiques et industrielles, Exposés de Géométrie*, publiés sous la direction de M. Cartan, Paris, Hermann, 1934). Un exposé de la même question paraîtra prochainement dans les *Rendiconti del Seminario matematico della R. Università di Roma*, sous la signature de M. Enriques.

(2) Sur une surface algébrique non rationnelle de genres arithmétique et géométrique nuls, et de genre linéaire un. (*Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége*, 1934, pp. 184-187.)

fixe du système tricanonique. Les résultats que nous avons obtenus sont énoncés à la fin du travail.

1. Soit F une surface algébrique privée de courbes exceptionnelles, de genres $p_a = p_g = 0$, $p^{(1)} = 1$, dont les courbes tricanoniques sont formées d'une partie fixe Δ et d'une partie irréductible C, variable dans un faisceau linéaire $|C|$. Puisque $p^{(1)} = 1$, les courbes C sont elliptiques et Δ est formée de courbes elliptiques, composantes partielles du faisceau $|C|$. On a en outre, d'après les hypothèses, $P_3 = 2$ et par suite $P_2 \geqq 1$.

L'adjointe C' d'une courbe C ne peut remontrer cette courbe. D'autre part, le système $|C' - C|$ n'existant pas, la courbe C' ne peut comprendre une courbe C et est formée de parties de courbes du faisceau $|C|$.

Si l'on désigne par

$$|K_3| = |\Delta + C|$$

le système tricanonique de F, on a

$$|K'_3| = |\Delta + C'|$$

et par suite

$$|K_3| = |3K'_3 - 3K_3| = |3C' - 3C|.$$

Il vient donc

$$3C' \equiv \Delta + 4C.$$

Supposons que $|C|$ contienne ν courbes dégénérées, la première en k courbes $C_{11}, C_{12}, \ldots, C_{1k}$, elliptiques, comptées respectivement $\mu_{11}, \mu_{12}, \ldots, \mu_{1k}$ fois; la seconde en k' courbes elliptiques comptées respectivement un certain nombre de fois; et ainsi de suite. On a donc

$$C \equiv \mu_{11}C_{11} + \mu_{12}C_{12} + \cdots + \mu_{1k}C_{1k}, \ldots \tag{1}$$

La courbe adjointe C' sera formée des composantes partielles des ν courbes C dégénérées et nous écrirons

$$C' = \lambda_{11}C_{11} + \lambda_{12}C_{12} + \cdots + \lambda_{1k}C_{1k} + D_2 + \cdots + D_\nu, \tag{2}$$

où $\lambda_{11}, \lambda_{12}, \ldots, \lambda_{1k}$ sont des entiers au plus égaux respectivement à $\mu_{11}, \mu_{12}, \ldots, \mu_{1k}$, l'un au moins des λ étant inférieur à la quantité μ correspondante, et où $D_2, \ldots, D_\nu$ sont formées d'une manière analogue au moyen des autres courbes dégénérées de $|C|$.

2. Si l'on désigne par C'_{11} l'adjointe de C_{11}, on a, en partant de la relation fonctionnelle (1),

$$C' = (\mu_{11} - 1)\,C_{11} + \mu_{12}C_{12} + \cdots + \mu_{1k}C_{1k} + C'_{11}$$

et, par comparaison avec (2),

$$C'_{11} = (\lambda_{11} - \mu_{11} + 1)\,C_{11} + (\lambda_{12} - \mu_{12})\,C_{12} + \cdots + (\lambda_{1k} - \mu_{1k})\,C_{1k} \\ + D_2 + \cdots + D_\nu.$$

La courbe C'_{11} existe certainement; d'autre part, la courbe $D_2 + \ldots + D_\nu$ ne peut engendrer un faisceau, car celui-ci devrait être composé au moyen de $|C|$, ce qui est impossible, puisque $C'_{11} - C_{11}$ n'existe pas. La courbe $D_2 + \ldots + D_\nu$ est donc isolée et l'on doit avoir

$$\lambda_{11} - \mu_{11} + 1 \geq 0,\ \lambda_{12} - \mu_{12} \geq 0, \ldots, \lambda_{1k} - \mu_{1k} \geq 0.$$

Mais on ne peut avoir $\lambda_{11} - \mu_{11} + 1 > 0$, car alors la courbe canonique $C'_{11} - C_{11}$ de F existerait; donc on a $\mu_{11} = \lambda_{11} + 1$. D'autre part, comme les λ sont au plus égaux aux μ, on a

$$\lambda_{12} = \mu_{12}, \ldots, \lambda_{1k} = \mu_{1k}.$$

Cela étant, si $k > 1$, on peut répéter le même raisonnement sur l'adjointe C'_{12} de C_{12}; cela conduira à $\lambda_{11} = \mu_{11}$ et $\mu_{12} = \lambda_{12} + 1$, ce qui est en contradiction avec les résultats précédents. On a donc $k = 1$.

On voit donc que les courbes C dégénérées, dont les composantes interviennent dans la formation de la courbe C', sont formées d'une seule courbe comptée un certain nombre de fois. Nous désignerons par $C_1, C_2 \ldots, C_\nu$ ces courbes et nous écrirons

$$C \equiv \mu_1 C_1 \equiv \mu_2 C_2 \equiv \cdots \equiv \mu_\nu C_\nu.$$

On aura alors

$$C' \equiv \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \cdots + \lambda_\nu C_\nu$$

et, d'après ce qui précède,

$$\mu_1 = \lambda_1 + 1, \ldots, \mu_\nu = \lambda_\nu + 1.$$

Par suite

$$C \equiv (\lambda_1 + 1) C_1 \equiv (\lambda_2 + 1) C_2 \equiv \cdots \equiv (\lambda_\nu + 1) C_\nu. \qquad (3)$$

Enfin, nous aurons

$$C_1' = \lambda_2 C_2 + \cdots + \lambda_\nu C_\nu,$$
$$C_2' = \lambda_1 C_1 + \lambda_3 C_3 + \cdots \lambda_\nu C_\nu, \ldots$$

3. Des deux dernières relations fonctionnelles, on déduit

$$C_1'' = (\lambda_2 - 1) C_2 + \lambda_1 C_1 + 2\lambda_3 C_3 + \cdots + 2\lambda_\nu C_\nu.$$

Par conséquent, on a, en tenant compte de (3),

$$C_1'' - C_1 \equiv (\lambda_1 - 1) C_1 + (\lambda_2 - 1) C_2 + (\lambda_3 - 1) C_3 + \cdots$$
$$+ (\lambda_\nu - 1) C_\nu + (\nu - 2) C.$$

Or, le système bicanonique $C_1'' - C_1$ de F, qui existe certainement, ne peut contenir le système tricanonique comme partie. On a donc $\nu \lesseqgtr 3$.

Supposons $\nu = 3$. On a

$$C_1''' = (\lambda_1 - 1) C_1 + (2\lambda_2 - 1) C_2 + 3\lambda_3 C_3$$

et par suite

$$| K_3 | = (\lambda_1 - 2) C_1 + (2\lambda_2 - 1) C_2 + (2\lambda - 1) C_3 + C = \Delta + C.$$

Il vient donc

$$\Delta = (\lambda_1 - 2) C_1 + (2\lambda_2 - 1) C_2 + (2\lambda_3 - 1) C_3.$$

La courbe Δ doit être isolée et deux cas peuvent se présenter :

1° On a $\lambda_1 = 1$. L'un des nombres λ_2, λ_3 est égal à l'unité et l'autre à deux. Supposons, pour fixer les idées, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$. On aura

$$\Delta = - C_1 + C_2 + 3C_3 = - C_1 + C_2 + C = C_1 + C_2.$$

2° On a $\lambda_1 \geqq 2$. On doit avoir $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1$. Mais alors, en intervertissant les rôles de C_1, C_2 dans le raisonnement qui précède, on aura

$$\Delta = (2\lambda_1 - 1) C_1 - C_2 + C_3$$

et par suite $\lambda_1 = 2$,

$$\Delta = 3C_1 - C_2 + C_3 = C_2 + C_3.$$

On voit donc que, sauf un changement de notations éventuel, il suffit de considérer le cas $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$. On aura alors

$$C'_1 = C_2 + 2C_3, \qquad C'_2 = C_1 + 2C_3, \qquad C'_3 = C_1 + C_2 = \Delta.$$

Par suite,

$$C' \equiv C_1 + C_2 + 2C_3,$$
$$|C'' - C| = |C_3 + C|,$$
$$|C''' - C| = |C_1 + C_2 + C|, \ldots$$

On a donc $P_2 = 2$, $P_3 = 2$, ...,

4. Supposons maintenant $\nu = 2$. On a

$$C''_1 - C_1 = (\lambda_1 - 1) C_1 + (\lambda_2 - 1) C_2,$$
$$C'_1 = \lambda_2 C_2, \qquad C'_2 = \lambda_1 C_1,$$
$$C' = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2,$$
$$C'' - C = (\lambda_1 - 1) C_1 + (\lambda_2 - 1) C_2,$$
$$C''' - C = (\lambda_1 - 2) C_1 + (\lambda_2 - 2) C_2 + C.$$

Par conséquent, on a $\lambda_1 \geq 2$, $\lambda_2 \geq 2$ et

$$\Delta \equiv (\lambda_1 - 2) C_1 + (\lambda_2 - 2) C_2.$$

Le système bicanonique $|C'' - C|$ est formé d'une courbe nécessairement isolée et l'on a $P_2 = 1$, $P_3 = 2$.

Observons que l'on ne peut d'ailleurs avoir $\nu < 2$.

En résumé : *Si une surface algébrique de genres* $p_a = p_g = 0$, $p^{(1)} = 1$ *possède des courbes tricanoniques formées d'une partie fixe et d'une partie irréductible variable dans un faisceau* $|C|$:

1° *Ce faisceau contient trois courbes multiples* $2C_1$, $2C_2$,

$3C_3$ *et les systèmes bicanonique et tricanonique sont respectivement*

$$|C_3 + C|, \qquad |C_1 + C_2 + C|;$$

on a $P_2 = 2$, $P_3 = 2$.

2° *Ou ce faisceau contient deux courbes multiples* $\lambda_1 C_1$, $\lambda_2 C_2$ *et les systèmes bicanonique et tricanonique sont*

$$(\lambda_1 - 1) C_1 + (\lambda_2 - 1) C_2, \qquad (\lambda_1 - 2) C_1 + (\lambda_2 - 2) C_2 + C;$$

on a $P_2 = 1$, $P_3 = 2$.

Liége, le 8 décembre 1934.

M. HAYEZ. Imprimeur de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.