

Remarques sur les correspondances rationnelles entre deux surfaces de genres un,

par LUCIEN GODEAUX, Correspondant de l'Académie.

Dans des travaux antérieurs ⁽¹⁾, nous avons étudié les correspondances $(1, n)$ entre deux surfaces Φ, F de genres un ($p_a = P_4 = 1$). L'involution déterminée par une telle correspondance sur la surface F est, d'après un théorème de M. Enriques ⁽²⁾, engendrée par un groupe de transformations birationnelles de la surface en elle-même. Cette involution ne présente d'ailleurs qu'un nombre fini de points unis. Pour obtenir les valeurs possibles de n , nous avons considéré en premier lieu les involutions d'ordre premier, nécessairement cycliques d'après le théorème de M. Enriques. Considérons, sur la surface F , une involution I_p d'ordre premier p et prenons pour surface image de cette involution une surface Φ d'ordre $2\pi - 2$, à sections hyperplanes Γ de genre π , appartenant à un espace linéaire S_π à π dimensions. Désignons par C les courbes qui correspondent aux courbes Γ sur la surface F . Nous avons montré que l'on peut toujours s'arranger de manière que le système linéaire (incomplet) $|C|$ soit dépourvu de points-base. Dans ces conditions, la surface Φ possède un nombre fini de points de diramation qui sont des points doubles de cette surface. Les courbes C sont de genre $p(\pi - 1) + 1$ et forment un système linéaire de degré

(1) Mémoire sur les involutions appartenant à une surface de genres un. (*Annales de l'École normale supérieure*, 1914, pp. 357-430; 1919, pp. 51-70.)

(2) Sulle trasformazioni delle superficie di genere uno. (*Rend. R. Accad. Bologna*, 1909-1910, pp. 71-75.)

$2p(\pi - 1)$, de dimension π ; les courbes C appartiennent, comme courbes totales, à un système linéaire complet de dimension $p(\pi - 1) + 1$.

Supposons $p > 2$ et soient A un point uni de I_p , A' le point de diramation correspondant sur Φ . Nous avons fait voir que le point A' ne pouvait être simple pour Φ ; d'autre part, il ne peut avoir une multiplicité supérieure à deux pour cette surface, car celle-ci deviendrait rationnelle. Le point A' est donc un point double de Φ . Appelons C_1 les courbes C passant par A ; il leur correspond les sections E_1 de Φ par les hyperplans passant par A' . Nous avons montré que les courbes C_1 ont en A un point double à tangentes fixes et distinctes a_1, a_2 . Pour obtenir une limite supérieure de p , nous avons ensuite considéré les courbes C_1 assujetties à avoir, en A , une tangente distincte de a_1, a_2 ; désignons ces courbes par C_2 . Nous avons admis que les courbes C_2 avaient nécessairement des tangentes variables en A , ce qui nous a permis de conclure que l'on avait $p \leq 3$ et par suite $p = 3$. Or, il peut se faire que les courbes C_2 aient en A une multiplicité supérieure à deux, mais des tangentes fixes, confondues avec a_1, a_2 . Il se pourrait donc que l'on ait des involutions de genres un, d'ordre premier p supérieur à trois, appartenant à une surface de genres un. Et effectivement, nous construirons plus loin une involution d'ordre cinq, rentrant dans cette catégorie. Nous sommes donc conduit à reprendre notre classification des correspondances rationnelles entre deux surfaces de genres un.

1. Soient F une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$); I_p une involution d'ordre premier $p > 2$ et de genres un appartenant à F ; T la transformation birationnelle de F en elle-même, de période p , génératrice de I_p ; Φ une surface image de l'involution I_p . L'involution I_p ne possède qu'un nombre fini de points unis, si l'on suppose que le modèle projectif envisagé de F est dépourvu de courbes exceptionnelles (ce qui n'est pas une restriction). Il est donc possible de trouver, sur F , un

système linéaire $|C'_1|$, dépourvu de points-base et dont les courbes ne passent donc pas en général par des points unis de I_p . Soient $|C'_2|$, $|C'_3|$, ..., $|C'_p|$ les systèmes linéaires que $T, T^2, \dots, T^{p-1}$ font correspondre à $|C'_1|$. Le système linéaire complet

$$|C| = |C'_1 + C'_2 + \dots + C'_p|$$

est transformé en lui-même par T et contient un système linéaire incomplet, $|C_1|$ — composé au moyen de l'involution I_p , dépourvu de points-base. Soit r la dimension de ce système.

En rapportant projectivement les courbes C_1 aux hyperplans d'un espace linéaire S_r à r dimensions, on obtient une surface modèle projectif de Φ ; c'est ce modèle projectif que nous désignerons à l'avenir par Φ . Soit π le genre des sections hyperplanes Γ_1 de Φ ; la surface Φ est d'ordre $2\pi - 2$ et l'on a $r = \pi$.

Les courbes C_1 et par suite les courbes C ont le genre $p(\pi - 1) + 1$; les systèmes $|C_1|$ et $|C|$ ont le degré $2p(\pi - 1)$; le premier a la dimension π et le second la dimension $p(\pi - 1) + 1$. Nous prendrons comme modèle projectif de F une surface de l'espace $S_{p(\pi - 1) + 1}$, ayant les courbes C comme sections hyperplanes. La transformation T est alors déterminée sur F par une homographie de $S_{p(\pi - 1) + 1}$, que nous désignerons toujours par T . On peut d'ailleurs supposer ⁽¹⁾, et c'est ce que nous ferons dans la suite, que l'homographie T possède p axes ponctuels $S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(p)}$. Un seul de ces axes ponctuels, $S^{(1)}$ par exemple, est rencontré par la surface F , aux points unis de I_p . Ces points sont simples pour F et le plan tangent à la surface en un quelconque de ces points ne rencontre pas $S^{(1)}$ en dehors du point de contact. Les courbes C_1 sont découpées sur F par les hyperplans passant par les axes $S^{(2)}, \dots, S^{(p)}$ et l'espace $S^{(1)}$ a donc la dimension π .

⁽¹⁾ Voir nos Recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, Cl. des Sc., 1930, pp. 448-465; 1931, pp. 1131-1150 et 1356-1364). Voir plus particulièrement la première communication.

2. Soient A un point uni de I_p sur F et A' le point de diramation correspondant sur Φ . Le point A ne peut être un point uni parfait, car alors le point A' serait multiple d'ordre p ($p > r$) pour Φ , ce qui est impossible ⁽¹⁾. Dans le domaine du premier ordre de A sur F , T détermine donc une homographie de période p , ayant deux points unis A_1, A_2 . Le plan tangent α à F en A s'appuie donc en deux points sur des axes de l'homographie T , distincts de $S^{(1)}$. Supposons, pour fixer les idées, que α s'appuie en un point B_1 sur $S^{(2)}$ et en un point B_2 sur $S^{(3)}$. Dans le plan α , T détermine une homographie de période p ayant trois points unis A, B_1, B_2 . La droite B_1A , tangente à F en A , contient le point A_1 infiniment voisin de A et la tangente B_2A contient le point A_2 .

Désignons par $C_1^{(1)}$ les courbes C_1 assujetties à passer par A . Les hyperplans découpant sur F les courbes $C_1^{(1)}$ passent par $A, S^{(2)}, \dots, S^{(n)}$ et par suite contiennent α . Les courbes $C_1^{(1)}$ ont en A un point de multiplicité $s_1 \geq 2$, les tangentes à ces courbes en ce point étant confondues avec $\alpha_1 = AB_1$ et $\alpha_2 = AB_2$.

Le point A est l'origine de deux branches au moins d'une courbe $C_1^{(1)}$; par suite ⁽²⁾ le point A' est double biplanaire pour Φ et il y a exactement deux branches d'origine A sur une courbe $C_1^{(1)}$.

Désignons par $C_1^{(2)}$ les courbes $C_1^{(1)}$ assujetties à toucher en A une droite (tangente à F) distincte de a_1, a_2 . Si les courbes $C_1^{(2)}$ ont des tangentes fixes en A , celles-ci coïncident nécessairement avec a_1, a_2 . Dans ce cas, appelons $C_1^{(3)}$ les courbes $C_1^{(2)}$ assujetties à toucher en A une droite distincte de a_1, a_2 , et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on arrive à des courbes $C_1^{(v)}$ ayant des tangentes variables en A .

⁽¹⁾ Voir nos Recherches sur les involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à une surface algébrique. (*Bull. de la Soc. math. de France*, 1919, pp. 1-16.)

⁽²⁾ Voir nos Recherches sur les involutions cycliques... (*loc. cit.*), première communication.

Observons que si l'on part des courbes C'_1 touchant a_1 (ou a_2) en A, les courbes $C'_2, C'_3, \dots, C'_p$ que T et ses puissances leur font correspondre possèdent la même propriété. Il existe donc des courbes C_1 ayant en A un point p -uple; les tangentes à ces courbes en ce point coïncident soit avec a_1 , soit avec a_2 . Ces courbes déterminent un système linéaire de courbes C_1 ayant un point p -uple à tangentes variables en A; ce système linéaire coïncide nécessairement avec $|C_1^{(p)}|$.

Dans ces conditions, si nous désignons par $s_2, s_3, \dots$ les multiplicités des courbes $C_1^{(2)}, C_1^{(3)}, \dots$ en A, on a

$$2 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_{v-1} < p.$$

3. En rapportant projectivement les courbes $C_1^{(i)}$ aux hyperplans d'un espace linéaire $S_{\pi-i}$, on obtient une image de l'involution I_p que nous désignons par Φ_i . Aux courbes $C_1^{(i+1)}$ correspondent, sur cette surface, les sections par les hyperplans passant par un point A'_i de la surface.

Donnons à i les valeurs 1, 2, ..., $v-1$. La surface Φ_i est projectivement identique à la projection de la surface Φ_{i-1} , à partir de A'_{i-1} , sur un hyperplan de l'espace ambiant ne passant pas par A'_{i-1} . Et en particulier, Φ_1 est projectivement identique à la projection de Φ , à partir de A, sur un hyperplan de S_π ne passant pas par A.

Le point A étant double biplanaire pour Φ , la surface Φ_1 a l'ordre $2\pi-4$ et ses sections hyperplanes ont le genre $\pi-1$. Les courbes $C_1^{(2)}$ ont en A une certaine multiplicité s_2 et des tangentes fixes a_1, a_2 . Sur une courbe $C_1^{(2)}$, le point A est l'origine de deux branches au moins et le point A'_1 est donc double biplanaire pour Φ_1 . Il y a donc, sur une courbe $C_1^{(2)}$, exactement deux branches d'origine A.

La surface Φ_2 a l'ordre $2\pi-6$; ses sections hyperplanes ont le genre $\pi-2$, et en reprenant le raisonnement précédent, on voit que A'_2 est double biplanaire pour la surface. Et ainsi de suite jusqu'à la surface Φ_{v-1} .

La surface $\Phi_{\nu-1}$ a l'ordre $2\pi - 2\nu$ et ses sections hyperplanes ont le genre $\pi - \nu + 1$. Envisageons une courbe $C_1^{(\nu)}$; elle possède un point p — uple à tangentes variable en A ; par conséquent, les points de cette courbe infiniment voisins de A forment un groupe de 1_p . Il en résulte que la section hyperplane correspondante de $\Phi_{\nu-1}$ a un point simple en $A'_{\nu-1}$. Le point $A'_{\nu-1}$ est donc simple pour la surface $\Phi_{\nu-1}$.

Les sections de $\Phi_{\nu-1}$ passant par $A'_{\nu-1}$ forment un système de degré effectif $2\pi - 2\nu - 1$; donc le degré effectif du système $|C_1^{(\nu)}|$ est égal à $p(2\pi - 2\nu - 1)$. D'autre part, ce degré est égal à $p(2\pi - 2) - p^2$; par conséquent, on a $\nu = \frac{1}{2}(p + 1)$.

Au point de diramation A' , la surface Φ possède donc un point double biplanair auquel sont infiniment voisins successifs $\frac{1}{2}(p - 3)$ points doubles biplanaires dont le dernier est ordinaire. Nous avons montré ailleurs ⁽¹⁾ que les courbes $C_1^{(1)}$ ont en A un point double à tangentes fixes a_1, a_2 , auquel sont infiniment voisins successifs, sur chaque branche, $p - 2$ points simples.

4. Nous avons établi antérieurement ⁽²⁾ que si, entre une surface Φ de genres $\pi_a, \pi^{(1)}$ et une surface F de genres $p_a, p^{(1)}$, on a une correspondance rationnelle $(1, p)$ donnant naissance, sur F , à une involution cyclique ayant τ points unis, telle que les points de diramation soient, pour la surface Φ supposée normale, des points doubles biplanaires du type qui vient d'être rencontré, on a

$$\begin{aligned} 12(p_a + 1) &= 12p(\pi_a + 1) - (p^2 - 1)\tau, \\ p^{(1)} - 1 &= p(\pi^{(1)} - 1). \end{aligned}$$

Dans le cas actuel, on a $p^{(1)} = 1, \pi^{(1)} = 1$ et la seconde rela-

⁽¹⁾ Recherches sur les involutions cycliques... (*loc. cit.*), seconde communication.

⁽²⁾ Recherches sur les involutions douées d'un nombre fini... (*loc. cit.*).

tion est vérifiée identiquement. On a, d'autre part, $p_a = \pi_a = 1$ et par suite

$$(p + 1)\tau = 24.$$

Ceci donne, comme cas possibles : $p=3, \tau=6$; $p=5, \tau=4$; $p=7, \tau=3$; $p=11, \tau=2$ et enfin $p=23, \tau=1$. Nous allons montrer par un exemple que le cas $p=5, \tau=4$ peut effectivement se présenter.

5. Considérons, dans l'espace ordinaire, la surface F, du quatrième ordre, l'équation

$$\left. \begin{aligned} a_1 x_1^3 x_2 + a_2 x_2^3 x_3 + a_3 x_3^3 x_4 + a_4 x_4^3 x_1 + a_5 x_1^2 x_3^2 \\ + a_6 x_2^2 x_4^2 + a_7 x_1 x_2 x_3 x_4 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Elle est dépourvue de points multiples et est par suite de genres un ($p_a = P_4 = 1$). Elle est de plus transformée en elle-même par l'homographie cyclique de période cinq

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^3 x_3 : \varepsilon^2 x_4, \quad (2)$$

où ε est une racine primitive cinquième de l'unité. Cette homographie détermine, sur la surface F, une involution I_5 , d'ordre cinq, ayant quatre points unis, sommets du tétraèdre de référence.

Pour construire le système $|C|$ et la surface Φ , prenons comme système $|C'_1|$ celui des sections planes de la surface. Le système $|C|$ est alors découpé sur F par les surfaces du cinquième ordre et le système partiel $|C_1|$, composé au moyen de I_5 , par les surfaces

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 x_1^5 + \lambda_2 x_2^5 + \lambda_3 x_3^5 + \lambda_4 x_4^5 + \lambda_5 x_1^3 x_3 x_4 + \lambda_6 x_2^3 x_1 x_4 + \lambda_7 x_3^3 x_1 x_2 \\ + \lambda_8 x_4^3 x_2 x_3 + \lambda_9 x_1 x_3^2 x_4^2 + \lambda_{10} x_2 x_1^2 x_4^2 + \lambda_{11} x_3 x_1^2 x_2^2 + \lambda_{12} x_4 x_2^2 x_3^2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Si l'on considère le point uni $(1, 0, 0, 0)$, les courbes $C_1^{(1)}$ sont données par $\lambda_1 = 0$, les courbes $C_1^{(2)}$ par $\lambda_1 = \lambda_5 = 0$, enfin les courbes $C_1^{(3)}$ par $\lambda_1 = \lambda_5 = \lambda_9 = 0$.

Pour obtenir la surface Φ , il suffit de rapporter projectivement les courbes C_1 , c'est-à-dire le système (3), aux hyper-

plans d'un espace S_{11} . Faisons correspondre à la surface (3) l'hyperplan

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_{12} X_{12} = 0.$$

La surface Φ a l'ordre vingt et ses sections hyperplanes sont de genre onze. Elle a pour équations

$$\begin{aligned} \left\| \begin{array}{cccc} X_1 & X_5 & X_{11} & X_{10} \\ X_5 & X_9 & X_{12} & X_8 \end{array} \right\| &= 0, \quad \left\| \begin{array}{cccc} X_2 & X_6 & X_{11} & X_{12} \\ X_6 & X_{10} & X_5 & X_9 \end{array} \right\| = 0, \\ \left\| \begin{array}{cccc} X_3 & X_7 & X_9 & X_{12} \\ X_7 & X_{11} & X_{10} & X_6 \end{array} \right\| &= 0, \quad \left\| \begin{array}{cccc} X_4 & X_8 & X_9 & X_{10} \\ X_8 & X_{12} & X_7 & X_{11} \end{array} \right\| = 0, \\ a_1 X_5^2 X_2 X_9 + a_2 X_6^2 X_3 X_{10} + a_3 X_7^2 X_4 X_{11} + a_4 X_8^2 X_5 X_{12} \\ + a_5 X_5 X_6 X_7 X_9 + a_6 X_5 X_6 X_8 X_{12} + a_7 X_1 X_2 X_3 X_4 &= 0. \end{aligned}$$

Appelons O_i le point de S_{11} dont toutes les coordonnées sont nulles sauf X_i . Les points de diramation de la surface Φ sont O_1, O_2, O_3, O_4 ; chacun de ces points est double biplanaire pour la surface et possède un point double biplanaire infiniment voisin.

Fixons l'attention sur le point de diramation O_1 , correspondant au point uni $(1, 0, 0, 0)$. Aux courbes $C_1^{(1)}$ correspondent les sections de Φ par les hyperplans passant par O_1 ; aux courbes $C_1^{(2)}$ correspondent les sections de Φ par les hyperplans passant par $O_1 O_5$; enfin, aux courbes $C_1^{(3)}$ correspondent les sections de Φ par les hyperplans passant par $O_1 O_5 O_9$.

Ainsi se trouve prouvée l'existence d'involutions cycliques de genres un et d'ordre cinq, sur une surface de genres un.

6. L'observation que nous avons faite sur les correspondances rationnelles entre deux surfaces de genres un peut être répétée pour les correspondances rationnelles entre deux surfaces de genres zéro et de bigenre un ($p_a = P_3 = 0, P_2 = 1$). Si entre deux surfaces de cette nature Φ, F nous avons une correspondance $(1, n)$, l'involution d'ordre n déterminée sur F ne possède qu'un nombre fini de points unis et est engendrée par un groupe de transformations birationnelles de la sur-

face F en elle-même ⁽¹⁾. Une surface normale de genres zéro et de bigenre un ne peut posséder de points de multiplicité supérieure à deux sans devenir rationnelle. Par conséquent, si l'on considère, sur la surface F de genres $p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$, une involution cyclique I_p , d'ordre premier $p > 2$, de genres $p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$, une surface normale Φ , image de cette involution, possédera aux points de diramation la même singularité que dans le cas des surfaces de genres un. Et l'on aura actuellement, par la formule du n° 4,

$$(p + 1)\tau = 12.$$

Les solutions possibles sont $p = 3$, $\tau = 3$; $p = 5$, $\tau = 2$; $p = 11$, $\tau = 1$.

⁽¹⁾ Sur les involutions appartenant à une surface de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 = 1$. (*Bull. de la Soc. Math. de France*, 1813, pp. 178-194); Mémoire sur les Surfaces algébriques de genres zéro et de bigenre un (*Ibidem*, 1915, pp. 89-117).

Liège, le 22 septembre 1934.