EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liège*,
N° 3, 1934.

Sur la détermination d'une transformation birationnelle involutive du sixième ordre,

par LUCIEN GODEAUX, Professeur à l'Université de Liége.

Considérons, dans un plan ϖ, sept points $A_1, A_2, \ldots, A_7$ dont six n'appartiennent jamais à une conique ni trois à une droite, mais d'ailleurs quelconques. Les courbes C_6 du sixième ordre ayant des points triples en A_1, A_2, des points doubles en A_3, A_4, A_5, A_6, un point simple en A_7, forment un réseau homaloïdal. En rapportant projectivement les courbes C_6 aux droites du plan, on obtient une transformation birationnelle T. Nous nous proposons de déterminer les conditions auxquelles doivent satisfaire les points $A_1, A_2, \ldots,$ A pour que cette transformation T soit involutive.

1 Les cubiques C_3 passant par $A_1, A_2, \ldots. A_6$ forment un système linéaire $|C_3|, \infty^3$, irréductible. En rapportant projectivement les courbes C_3 aux plans de l'espace, on obtient une surface cubique F, dépourvue de points multiples, représentable point par point sur le plan ϖ. Aux points $A_1, A_2, \ldots, A_6$ correspondent des droites $a_1, a_2, \ldots a_6$ de F, au point A_7 un point A' et à la transformation T, une transformation T' de F en elle-même.

Aux courbes C_3 passant par A_7, T fait correspondre des courbes d'ordre dix-huit comprenant toutes les courbes fondamentales de T et complétées par des cubiques C_3'. Si T est involutive, aux courbes C_3' correspondent les courbes C_3 passant pour A_7, augmentées de toutes les courbes fondamentales ; par suite, les courbes C_3' sont des courbes C_3 passant par A_7. Toute courbe C_3 passant par A_7 ne peut être transformée en elle-même par T, car alors T serait la transformation de Geiser, ce qui est impossible. Il en résulte que dans la gerbe de sommet A', T' détermine une homologie harmonique.

La seule droite fondamentale de T est la droite $A_1 A_2$, qui correspond au point A_7. Par conséquent, aux courbes C_3, T fait correspondre des courbes C_4, du quatrième ordre, ayant des points doubles en A_1, A_2 et des points simples en $A_3, \ldots, A_7$. Soient C_2 une conique passant par A_3, A_4, A_5, A_6, γ_2 la conique qui lui correspond sur F. Aux courbes découpées sur F par les quadriques passant par γ_2 et par A' correspondent les courbes C_4 de ϖ, par suite T' est une transformation quadratique involutive ayant pour point fondamental A′ et pour conique fondamentale γ_2.

2. Par un choix convenable du tétraèdre de référence, les équations de T′ peuvent s'écrire

$$\frac{x_1'}{x_1x_4} = \frac{x_2'}{-x_2x_4} = \frac{x_3'}{-x_3x_4} = \frac{x_4'}{x_1^2 + x_2x_3}.$$

T′ possède deux points unis $D_1\,(1, 0, 0, 1)$, $D_2\,(1, 0, 0, -1)$ et une conique Δ_2 lieu de points unis,

$$x_1 = 0, \qquad x_4^2 + x_2x_3 = 0.$$

L'équation de la surface F peut prendre l'une des formes

$$\left.\begin{aligned} &x_4^2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) + x_4(a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{23}x_2x_3) \\ &\quad + (x_1^2 + x_2x_3)(a_1x_1 - a_2x_2 - a_3x_3) = 0, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} &x_4^2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) + x_1x_4(a_{12}x_2 + a_{13}x_3) \\ &\quad - (a_1x_1 - a_2x_2 - a_3x_3)(x_1^2 + x_2x_3) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (2')$$

Dans les deux cas, aux points de F infiniment voisins de A correspondent les points de la droite r,

$$x_4 = 0, \qquad a_1x_1 - a_2x_2 - a_3x_3 = 0,$$

qui, avec γ_2 forme l'intersection de F et du plan $x_4 = 0$. Cette droite r correspond donc à la droite A_1A_2 et les droites a_1, a_2 s'appuient sur r.

3. Supposons en premier lieu que la surface F soit représentée par l'équation (1).

Le plan ra_1 coupe F suivant une troisième droite a_1' qui a pour image, sur le plan ϖ, la conique β_2 passant par les points A_1, A_3, A_4, A_5, A_6. Par suite, T′ ne peut faire correspondre a_1' à a_1.

La surface F coupe la droite $x_2 = x_3 = 0$, unie pour T′, en deux points P_1, P_2 donnés par

$$x_2 = 0, x_3 = 0, \qquad a_1x_4^2 + a_{11}x_1x_4 + a_1x_1^2 = 0.$$

Si $y_1, 0, 0, y_4$ sont les coordonnées de P_1, par exemple, le plan tangent à F en ce point a pour équation

$$y_4(a_1x_1 - a_2x_2 - a_3x_3) - a_1y_1x_4 = 0$$

et passe donc par r. Par P_1 (et de même par P_2) passent donc deux droites de F coupant r.

Supposons que la droite a_1 ne passe ni par P_1, ni par P_2. A la droite a_1, T′ fait correspondre une conique Γ_1 qui passe par A′ mais ne peut rencontrer r ni a_1 et qui par suite appartient au plan $A'a'_1$. Mais alors à cette conique correspondrait dans ϖ la droite A_2A_7, qui serait donc la courbe fondamentale associée à A_1, ce qui est absurde. On en conclut que la droite a_1 passe par P_1 et la droite a_2 par P_2. La droite a'_1 passe également par P_1 et la droite a'_2 qui, avec a_2 et r, forme l'intersection de F et du plan $a_2 r$, passe par P_2.

A la droite a_1, T^1 fait correspondre la conique Γ_1 qui complète l'intersection de F avec le plan $A'a_1$. De même, à a'_1 correspond la conique Γ'_1 située dans $A'a'_1$; à a_2, a'_2 correspondent les coniques Γ_2, Γ'_2 situées respectivement daus les plans $A'a_2$, $A'a'_2$. Les points P_1, P_2 étant échangés entre eux par T′, les coniques Γ_1, Γ'_1 passent par P_2 et les coniques Γ_2, Γ'_2 par P_1.

L'image de Γ_1 dans le plan ϖ est la cubique $\gamma_3^{(1)}$ ayant un point double en A_1, passant par $A_2, \ldots, A_7$. L'image de a'_2 est la conique β_1 passant par $A_2, \ldots, A'_6$; l'image de Γ'_1 est la droite A_2A_7. Les courbes $\gamma_3^{(1)}$, β_1 touchent la droite A_2A_7 en A_2.

De même, la cubique $\gamma_3^{(2)}$ ayant un point double en A_2 et passant par $A_1, A_3, \ldots, A_7$ et la conique β_2 touchent la droite A_1A_7 en A_1.

4. A la droite a_3, T′ fait correspondre une conique formée d'une droite passant par A′ et n'appartenant pas à F, et d'une droite a'_3 appartenant à F, ne passant pas par A′ et ne rencontrant par r. Les droites a_3, a'_3 ne peuvent se rencontrer, car le point $a_3a'_3$ serait uni et le plan tangent à F en ce point passerait par la droite $x_2 = x_3 = 0$, ce qui est impossible. La droite a'_3 rencontre a_1, a_2 et il est facile de voir que son image dans ϖ est la conique β_3 passant par A_1, A_2, A_4, A_5, A_6.

De même, aux points fondamentaux A_4, A_5, A_6 correspondent des coniques β_4, β_5, β_6 définies d'une manière analogue.

5. De ce qui précède, on conclut que l'on peut prendre arbitrairement les points $A_1, \ldots, A_6$, non situés sur une conique et dont trois ne sont jamais en ligne droite. On désigne par β_i la conique passant par ces six points sauf par A_i. L'intersection de la tangente à β_1 en A_2 et de la tangente à β_2 en A_1 donne le point A_7. Les cubiques dégénérées $A_1A_7 + \beta_1$, $A_2A_7 + \beta_2$ définissent un faisceau qui contient une cubique $\gamma_3^{(1)}$ ayant un point double en A_1 et une cubique $\gamma_3^{(2)}$ ayant un point double en A_2.

Les courbes fondamentales associées aux points $A_1A_2, \ldots, A_7$

sont respectivement les cubiques $\gamma_3^{(1)}$, $\gamma_3^{(2)}$, les coniques $\beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6$ et la droite A_1A_2.

Désignons par γ_3 les cubiques du faisceau déterminé par $\gamma_3^{(1)}$, $\gamma_3^{(2)}$. Sur une courbe γ_3, considérons l'involution I_1 dont les couples de points sont alignés sur A_1 et l'involution I_2 dont les couples de points sont alignés sur A_2. Le produit I_2I_1 est une transformation de première espèce de la courbe γ_3 considérée qui fait correspondre au point de γ_3 infiniment voisin de A_1 sur la droite A_1A_7, le point infiniment voisin de A_2 sur la droite A_2A_7 et inversement. Sur chaque courbe γ_3 se trouve donc déterminée rationnellement une transformation involutive de première espèce. On en conclut que la construction de A_7 est nécessaire et suffisante pour que la transformation T soit involutive.

La transformation T peut s'obtenir comme produit de deux transformations de Jonquières (engendrées par I_1, I_2 lorsque γ_3 varie dans le faisceau); elle possède quatre points unis.

6. Supposons maintenant que la surface F ait pour équation (2). La surface F contient une droite

$$x_1 = 0, \qquad a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$

unie pour T'. Cette droite passe par A' et ne peut être une des droites $a_1, a_2, \ldots, a_6$. Elle a par conséquent pour image, dans le plan ϖ, soit une droite passant par A_7 et par deux des points $A_1, \ldots A_6$, soit une conique passant par A_7 et par cinq des points $A_1, \ldots, A_6$. Ces cas ont été exclus par hypothèse.

En résumé :

Si l'on rapporte projectivement aux droites du plan les courbes du sixième ordre ayant deux points triples A_1, A_2, *quatre points doubles* A_3, A_4, A_5, A_6 *et un point simple* A_7, *six de ces points n'appartenant jamais à une conique ni trois à une droite, on obtient une transformation birationnelle. La condition nécessaire et suffisante pour que cette transformation soit involutive est que,* β_i *désignant la conique passant pour les points* $A_1, A_2, \ldots, A_6$ *sauf* A_i, *le point* A_7 *soit l'intersection de la tangente à* β_1 *en* A_2 *et de la tangente à* β_2 en A_1.

Liége, le 20 février 1934.

M. HAYEZ, Impr. de l'Académie royale, 112, rue de Louvain, Bruxelles.