EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liège*, N° 11, 1934.

Sur une involution dont les couples de points appartiennent aux rayons d'un complexe linéaire,

par LUCIEN GODEAUX, Membre de la Société.

L'involution d'ordre deux de l'espace dont les couples de points sont situés sur les droites d'un complexe linéaire Σ, chaque rayon de ce complexe portant un couple de l'involution, a été déterminée par Montesano [1]. Ce géomètre a montré que les couples de l'involution situés sur les rayons d'une congruence linéaire appartenant à Σ formaient une surface du quatrième ordre F. Les surfaces F forment un système linéaire $|F|$ de dimension quatre et de degré quatre, composé au moyen de l'involution I_2 en question.

La base du système $|F|$ est une courbe Γ, d'ordre dix et de genre onze et deux surfaces F ont en commun une courbe variable C, d'ordre six et de genre trois, appartenant à une quadrique. Montesano a en outre montré que la transformation peut être construite en partant d'un faisceau de surfaces F dont la base se compose d'une courbe Γ d'ordre dix et de genre onze, et d'une courbe C d'ordre six et de genre trois, appartenant à une quadrique. Dans cette note, nous nous proposons de montrer que *si le système des surfaces du quatrième ordre passant par une courbe d'ordre dix et de genre onze est composé au moyen d'une involution du second ordre, celle-ci est l'involution de Montesano.*

1. Soit Γ une courbe gauche d'ordre dix et de genre onze. Les surfaces du quatrième ordre sont en nombre ∞^{34} et découpent, sur Γ, une série d'ordre 40, non spéciale et par suite de dimension 29; il y a donc ∞^4 surfaces F du quatrième ordre passant par Γ. La surface générale F du système $|F|$ est dépourvue de points multiples et par suite est de genres un ($p_a = P_4 = 1$). Deux surfaces F ont en commun une courbe variable C du sixième ordre. Sur une surface F, les autres surfaces F découpent un système linéaire complet ∞^3 de courbes C; par suite les courbes C sont de genres trois. De plus, ce système linéaire est de degré quatre et par suite le système $|F|$ est de degré quatre.

---

(1) Su le trasformazioni involutorie dello spazio che determinano un complesso lineare di rette. (*Rend. R. Accad. Lincei*, 1° sem. 1888.)

Si nous désignons par D une section plane d'une surface F quelconque, nous avons, sur cette surface,

$$\Gamma + C \equiv 4D$$

et par conséquent les courbes C s'appuient en 20 points sur Γ.

2. Supposons que le système $|F|$, ∞^4, soit composé au moyen d'une involution I_2, d'ordre deux. Envisageons une surface F_0 du système $|F|$. Sur la surface F_0, les autres surfaces F découpent un système linéaire $\infty^3|C|$, de courbes C, composé au moyen de l'involution I_2. Par conséquent, si nous rapportons projectivement les courbes de ce système aux plans de l'espace, la surface F se transforme en une quadrique double Q, ayant une courbe de diramation du huitième ordre Δ.

Supposons en premier lieu que la quadrique Q ne soit pas un cône et soient $|g_1|$, $|g_2|$ ses systèmes de génératrices rectilignes. On sait que les droites g_1, g_2 coupent Δ chacune en quatre points.

Aux sections planes D de F correspondent, sur Q, des courbes D' du sixième ordre et de genre trois, touchant la courbe Δ en chaque point d'intersection.

Aux droites g_1, g_2 correspondent, sur F, des courbes elliptiques γ_1, γ_2. Une courbe γ_1 et une courbe γ_2 forment une courbe C; par conséquent les courbes γ_1, γ_2 sont des cubiques planes. Les courbes γ_1 forment un faisceau $|\gamma_1|$ et les plans de ces cubiques coupent donc F_0 suivant une droite r_1. De même, les courbes γ_2 forment un faisceau $|\gamma_2|$ et les plans de ces courbes coupent F_0 suivant une droite r_2. Une courbe γ_1 et une courbe γ_2 se coupent en deux points formant un groupe de I_2.

Puisque, sur la surface F_0, on a

$$C \equiv \gamma_1 + \gamma_2;$$

les courbes C ont les droites r_1, r_2 comme quadrisécantes. D'autre part, on a également

$$D \equiv r_1 + \gamma_1 \equiv r_2 + \gamma_2;$$

d'où

$$2D \equiv r_1 + r_2 + C.$$

Par conséquent, les quadriques passant par r_1, r_2 découpent sur F_0 les courbes C. Les couples de points de I_2 appartenant à une courbe C sont découpés sur cette courbe par des droites s'appuyant sur r_1, r_2.

Il existe donc un faisceau de surfaces F ayant comme base la courbe Γ et une sextique de genre trois appartenant à une quadrique. L'involution I_2 coïncide donc avec celle de Montesano.

3. Supposons maintenant que la quadrique $\underset{\sim}{Q}$ soit un cône et désignons par g ses génératrices rectilignes. On démontre encore qu'aux droites g correspondent sur F_0 des cubiques planes γ formant un faisceau et dont les plans coupent encore F_0 suivant une droite r. En effet, les courbes γ qui correspondent aux droites g sont elliptiques et deux de ces courbes doivent former une courbe C; donc les courbes γ ne peuvent être que des cubiques planes.

Le sommet du cône $\underset{\sim}{Q}$ équivaut, au point de vue des transformations birationnelles, à une courbe rationnelle de degré — 2. A cette courbe correspondent sur F_0 deux courbes rationnelles de degré — 2 et d'ordre zéro, c'est-à-dire des points doubles coniques de F_0, situés sur la droite r et par lesquels passent toutes les cubiques γ. Si l'on désigne par φ_1, φ_2 ces courbes rationnelles, on a

$$C \equiv 2\gamma + \varphi_1 + \varphi_2.$$

On peut déjà observer que les surfaces F étant en général dépourvues de points doubles, la quadrique $\underset{\sim}{Q}$ ne sera qu'exceptionnellement un cône et que par conséquent le théorème que nous voulions établir est démontré. On peut d'ailleurs établir également dans le cas présent que les courbes C sont sur des quadriques. On a en effet

$$D \equiv \gamma + r + \varphi_1 + \varphi_2;$$

d'où

$$C + 2r + \varphi_1 + \varphi_2 \equiv 2D.$$

Les courbes C sont donc découpées sur F_0 par les quadriques touchant la surface le long de la droite r.

Observons que si l'on part de l'involution de Montesano, une surface F_0 possédant deux points doubles sur une droite r est obtenue comme lieu des couples de l'involution I_2 situés sur les droites du complexe linéaire Σ s'appuyant sur une droite r du complexe.

Liége, le 19 novembre 1934.

M. HAYEZ, Impr. de l'Académie royale, 112, rue de Louvain, Bruxelles.