Extrait des *Bulletins de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences)
Séance du 2 décembre 1933, nº 12

Sur les points unis fondamentaux d'une involution du second ordre appartenant à une surface algébrique,

par Lucien GODEAUX, Correspondant de l'Académie.

Dans ce travail nous étudions les points unis isolés d'une involution du second ordre appartenant à une surface algébrique, qui sont en même temps fondamentaux pour cette involution. Trois cas peuvent se présenter : dans le premier, le point considéré équivaut à un point uni isolé ordinaire de l'involution ; dans les deux derniers, il équivaut à deux points unis isolés ordinaires. Nous avons surtout considéré le dernier cas et montré que l'on peut prendre comme image de l'involution une surface possédant un point double biplanaire ordinaire au point de diramation correspondant.

Un exemple élémentaire du dernier cas est fourni par la transformation quadratique du plan d'équations [1]

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1x_2 : x_1^2 : x_2(x_1 - x_3);$$

cette transformation est involutive et possède trois points unis isolés : les points $(2, 2, 1)$, $(2, -2, 1)$, qui sont unis ordinaires, et le point $(0, 0, 1)$, qui est à la fois uni et fondamental ; la courbe fondamentale qui lui est associée est la droite $x_1 = 0$. Dans le domaine de ce point se trouvent deux points unis, respectivement situés sur les droites $x_1 - x_2 = 0$, $x_1 + x_2 = 0$. Aux points de la droite fondamentale $x_1 = 0$ correspondent les points infiniment voisins du point du domaine du premier ordre du point $(0, 0, 1)$, situé sur la droite $x_2 = 0$.

[1] Voir notre note Sur une transformation quadratique involutive. (*Mathesis*, 1926, pp. 353-360.)

1. Soit F une surface algébrique admettant une transformation birationnelle involutive T en elle-même. Désignons par I_2 l'involution d'ordre deux engendrée sur F par T et supposons qu'un point A de F soit à la fois uni et fondamental pour I_2. Supposons, en outre, que le point A soit isolé en tant que point uni (c'est-à-dire n'appartienne pas à une courbe unie) et soit γ la courbe fondamentale (irréductible) qui lui est associée. Trois cas peuvent se présenter :

a) Les points infiniment voisins de A sont unis pour I_2. Alors la courbe γ, supposée irréductible, passe simplement par A et ses points correspondent, par T, aux points du domaine du second ordre de A, infiniment voisins du point du domaine du premier ordre de A situé sur γ.

b) Les points infiniment voisins de A ne sont pas tous unis pour I_2 ; ils sont par suite échangés entre eux par T et il y en a deux, A_1, A_2, qui sont unis pour I_2. Aux points infiniment voisins de A, T fait correspondre les points de la courbe γ et celle-ci a un point double en A, les tangentes en ce point étant les droites AA_1, AA_2.

c) Les points infiniment voisins de A ne sont pas tous unis pour I_2; il y en a deux, A_1, A_2, unis pour cette involution. La courbe γ passe simplement par A et ses points correspondent, par T, aux points infiniment voisins d'un point A_0, distinct de A_1, A_2, du domaine du premier ordre de A. Le point de γ infiniment voisin de A est distinct de A_0, A_1, A_2.

2. Plaçons-nous dans le premier cas. Considérons un système linéaire $|C_1|$ n'ayant aucun point-base sur la courbe γ et rencontrant cette courbe en m points (variables). Aux courbes C_1, T fait correspondre des courbes C_2 ayant en A un point multiple d'ordre m et un point de même multiplicité infiniment voisin de A sur γ. Les courbes C_2 ne peuvent rencontrer γ, en dehors de A, qu'en des points fixes éventuels, fondamentaux pour l'involution I_2.

Le système

$$| C | = | C_1 + C_2 |$$

est transformé en lui-même par T et l'on peut supposer (quitte à le remplacer par un de ses multiples convenablement choisi) qu'il n'est pas composé au moyen de l'involution I_2. Cela étant, soit r la dimension que l'on peut, par un choix convenable de $|C_1|$, supposer être au moins égale à trois. Rapportons projectivement les courbes de $|C|$ aux hyperplans d'un espace linéaire S_r à r dimensions. A la surface F correspond dans S_r une surface F'; au point A correspond sur P' un point A', uni pour l'involution I_2' homologue de I_2, tel que tous les points de son domaine du premier ordre soient unis pour I_2'. A la courbe γ correspond une courbe γ_1' passant par A' et aux points infiniment voisins du point du domaine du premier ordre de A situé sur γ correspond une courbe γ_2'. Les courbes γ_1', γ_2' sont conjuguées par rapport à l'involution I_2' et l'on se trouve ramené à l'étude d'un point uni isolé ordinaire A' d'une involution I_2'.

3. Passons au second cas. Aux courbes C_1 d'un système $|C_1|$ n'ayant aucun point-base sur la courbe γ correspondent des courbes C_2 ayant la multiplicité m en A, m étant le nombre des points de rencontre des courbes C_1 avec γ. De plus, au point A, les courbes C_2 ont des tangentes variables. En choisissant convenablement $|C_1|$, on peut s'arranger de façon que le système $|C| = |C_1 + C_2|$ soit irréductible, non composé au moyen de I_2 et au moins ∞^3. Rapportons alors projectivement les courbes de $|C|$ aux hyperplans d'un espace linéaire S_r à r dimensions, r étant la dimension du système $|C|$; à F correspond une surface F'. Au point A correspond une courbe (exceptionnelle) γ_1' et à la courbe γ, une courbe γ_2'. A I_2 correspond sur F' une involution I_2' par rapport à laquelle les courbes γ_1', γ_2' sont conjuguées. Les courbes γ_1', γ_2' se coupant en deux points qui correspondent aux points unis du domaine du premier ordre de A, ces deux points A_1', A_2' sont unis pour l'involution I'_2; ils sont des points unis isolés ordinaires de l'involution I'_2.

4. Dans le dernier cas, nous partirons encore d'un système linéaire $|C_1|$, n'ayant aucun point-base sur la courbe γ, et dont les courbes coupent cette courbe γ en m points. Au système $|C_1|$, T fait correspondre un système $|C_2|$ ayant en A un point-base de multiplicité m auquel est infiniment voisin un point A_0 multiple d'ordre m. Les courbes C_2 rencontrent éventuellement la courbe γ en des points fixes, distincts de A, fondamentaux pour l'involution I_2. Cela étant, les courbes du système $|C| = |C_1 + C_2|$ peuvent être supposées irréductibles, par un choix convenable de $|C_1|$; de plus on peut supposer que $|C|$ n'est pas composé au moyen de I_2 et que sa dimension r est supérieure à deux. Rapportons projectivement les courbes C aux hyperplans d'un espace linéaire S_r; à la surface F correspond une surface F' et au point A, un point A'. A la courbe γ correspond une courbe γ'_1 et au domaine du point A_0 correspond une courbe exceptionnelle γ'_0. Si I'_2 est l'involution qui, sur F', correspond à I_2, les courbes γ'_0, γ'_1 sont conjuguées par rapport à I'_2. Le point A' est uni pour I'_2 et contient, dans son domaine du premier ordre, deux points A'_1, A'_2 unis pour I'_2.

Revenons au système $|C|$. Les courbes C rencontrent γ en m points variables et ont en A un point multiple d'ordre m et m tangentes fixes, confondues avec AA_0. Les courbes C, assujetties à toucher en A une droite distincte de AA_0, acquièrent la multiplicité $m+1$ en A. Ces courbes rencontrent encore γ en $m-1$ points variables et par suite ont $m-1$ tangentes confondues avec AA_0 en A. Les deux autres tangentes à la courbe au point considéré sont variables.

La propriété précédente, transportée sur la surface F', équivaut à la suivante : Les sections hyperplanes de F' passant par le point A' ont un point double en ce point. Il en résulte que A' est double pour la surface F'.

Projetons la surface F' du point A' sur un hyperplan de S_r; nous obtenons une surface F'' contenant une conique φ de degré -2, sur laquelle se trouvent les projections A_1'', A_2'' des points A_1', A_2'. A l'involution I_2' de F' correspond sur F'' une involution I_2'' ayant pour points unis A_1'', A_2'' et transformant en elle-même la conique φ.

Projetons encore la surface F'' d'un point de φ, distinct de A_1'', A_2'', sur un hyperplan S_{r-2} de l'espace S_{r-1} contenant F''. Nous obtenons une surface F''' contenant une involution d'ordre deux, ayant deux points unis A_1''', A_2''', projections de A_1'', A_2''. Cette involution transforme en elle-même la droite $A_1'''A_2'''$, projection de la conique φ. De plus, à une section hyperplane de F''', l'involution fait correspondre une section hyperplane de cette surface. Cette involution est donc engendrée par une homographie involutive transformant F''' en elle-même.

5. Nous sommes donc ramené à la question suivante, que nous énoncerons en changeant de notations. Soient, dans un espace linéaire S_r, T une homographie harmonique, F une surface transformée en elle-même par T et contenant une droite φ, de degré -2, transformée en elle-même par T. Désignons par S', S'' les axes de T, par r_1, r_2 leurs dimensions. On a d'ailleurs

$$r_1 + r_2 + 2 = r + 1.$$

La droite φ s'appuie nécessairement sur les espaces S', S'', en des points A_1, A_2, unis pour l'involution I_2 engendrée sur F par T. Nous supposerons que I_2 ne possède qu'un nombre fini de points unis; les points A_1, A_2 sont donc isolés.

Désignons par Φ une surface image de l'involution I_2. Quelle est la singularité de Φ aux points de diramation correspondant à A_1, A_2?

Commençons par construire un nouveau modèle projectif de la surface F. Les hyperquadriques de S_r forment un système linéaire de dimension $R = \frac{1}{2} r (r+3)$, transformé en lui-même par T. Dans ce système, il y a deux systèmes linéaires partiels formés d'hyperquadriques transformées en elles-mêmes par T.

L'un de ces systèmes Σ_1 comprend les cônes obtenus en projetant de S' ou de S'' les quadriques de l'espace S'' ou de l'espace S'. Sa dimension est

$$R_1 = \frac{1}{2} r_1 (r_1 + 3) + \frac{1}{2} r_2 (r_2 + 3) + 1.$$

L'autre système Σ_2 est formé des hyperquadriques contenant les espaces S', S''; sa dimension est

$$R_2 = r_1 r_2 + r_1 + r_2.$$

On a d'ailleurs identiquement, conformément à la théorie des homographies,

$$R_1 + R_2 + 2 = R + 1.$$

Rapportons projectivement les hyperquadriques de S_r aux hyperplans d'un espace linéaire S_R. A la surface F correspond une surface F_1 invariante pour une homographie harmonique T_1 ayant pour axes un espace Σ' à R_1 dimensions et un espace Σ'' à R_2 dimensions. Les hyperplans passant par Σ_1 correspondent aux hyperquadriques de Σ_2 et les hyperplans passant par Σ'' aux hyperquadriques de Σ_1.

Aux points A_1, A_2 correspondent, sur F_1, deux points A'_1, A'_2 appartenant à Σ. D'ailleurs, à tout point uni de I_2 correspond un point de F_1 appartenant à Σ'. L'espace Σ'' ne rencontre donc pas F_1.

Il est aisé de voir qu'à la droite φ correspond, sur F_1, une conique ψ, de degré -2, passant par A'_1, A'_2, et dont le plan s'appuie sur Σ'', car il y a ∞^{R_1-2} hyperquadriques de Σ_1 contenant la droite φ.

6. Rapportons projectivement les hyperplans passant par Σ'' aux hyperplans d'un espace linéaire à R_1 dimensions. A la surface F_1 correspond une surface Φ, normale, image de l'involution engendrée par T_1 sur F_1 et par suite image de l'involution I_2 de F. Aux points A_1, A_2 correspondent des points doubles coniques A_1^*, A_2^* de Φ et à la conique φ correspond une droite γ passant par A_1^*, A_2^*. Il est aisé de voir que la droite γ a le degré -1, c'est-à-dire est exceptionnelle; il suffit d'ajouter γ aux courbes d'un système linéaire de Φ et de considérer le degré du système correspondant sur F_1.

L'ensemble de la droite exceptionnelle γ portant deux points doubles coniques équivaut à un point double biplanaire ordinaire. Désignons par Γ les sections hyperplanes de Φ. Les courbes $\Gamma + \gamma$ ne rencontrent plus γ et si l'on prend pour modèle projectif de Φ une surface Φ_1 ayant les courbes $\Gamma_1 = \Gamma + \gamma$ comme sections hyperplanes, aux deux points doubles A_1^*, A_2^* correspondent deux droites, de degré -2, de la surface Φ_1, se coupant en un point. Les courbes $\Gamma_2 = \Gamma_1 + \gamma_1 + \gamma_2$, où γ_1, γ_2 sont les droites en question, ne rencontrent plus γ_1, γ_1. Si l'on prend pour modèle projectif de Φ la surface Φ_2 ayant les courbes Γ_2 comme sections hyperplanes, à l'ensemble des droites γ_1, γ_2 correspond le domaine d'un point double biplanaire ordinaire de cette surface Φ_2.

Ainsi se trouve démontrée la propriété énoncée au début de cette note.

Liége, le 30 novembre 1933.

M. HAYEZ, imprimeur de l'Académie royale de Belgique, rue de Louvain, 112, Bruxelles.