Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences).
Séance du 6 novembre 1937, n° 11.

Sur une surface algébrique de diviseur deux déduite de la surface de Veronese,

par LUCIEN GODEAUX, Correspondant de l'Académie.

Dans une note parue voici quelques années [1], nous avons établi que si l'on remplace dans l'équation d'une surface de Steiner les coordonnées courantes par les premiers membres des équations de quatre quadriques linéairement indépendantes, on obtient une surface, du huitième ordre, de diviseur deux. La surface de Steiner étant la projection d'une surface de Veronese, on peut se demander si le résultat précédent peut être étendu à celle-ci. La réponse est affirmative, comme nous allons le montrer.

1. Soient, dans un espace linéaire à cinq dimensions S_5,

$$\varphi_{ik}(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 0, \qquad (i, k = 1, 2, 3), \quad (\varphi_{ik} \equiv \varphi_{ki}),$$

les équations de six hyperquadriques linéairement indépendantes, sans point commun. Formons le déterminant symétrique

$$\begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{12} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \varphi_{13} & \varphi_{23} & \varphi_{33} \end{vmatrix} \tag{1}$$

et écrivons qu'il est de caractéristique un. Nous obtenons ainsi six hypersurfaces du quatrième ordre ayant en commun une surface Φ d'ordre 32.

(1) Sur une surface algébrique du huitième ordre. (*The Tôhoku Mathematical Journal*, 1933, pp. 122-126.)

La surface Φ est l'image d'une involution I_2 d'ordre deux, privée de points unis, appartenant à une surface F, d'ordre 64, située dans un espace S_8 à huit dimensions. Considérons en effet la surface d'équations

$$\left.\begin{array}{lll} x_6^2 = \varphi_{11}, & x_7^2 = \varphi_{22}, & x_8^2 = \varphi_{33}, \\ x_7 x_8 = \varphi_{23}, & x_8 x_6 = \varphi_{13}, & x_6 x_7 = \varphi_{12}. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Cette surface, d'ordre 64, est transformée en elle-même par l'homographie harmonique H d'équations

$$\frac{x'_0}{x_0} = \frac{x'_1}{x_1} = \cdots = \frac{x'_5}{x_5} = \frac{x'_6}{-x_6} = \frac{x'_7}{-x_7} = \frac{x'_8}{-x'_8}.$$

Cette homographie possède deux axes ponctuels σ_5, d'équations

$$x_6 = x_7 = x_8 = 0,$$

σ_2 d'équations

$$x_0 = x_1 = \cdots = x_5 = 0.$$

Ces axes ne rencontrent pas la surface F; donc sur celle-ci H engendre une involution I_2, d'ordre deux, privée de points unis. En projetant F de σ_2 sur σ_5, on obtient une image de l'involution I_2 qui est précisément la surface Φ.

2. L'involution I_2 étant privée de points unis, la surface Φ a le diviseur de Severi $\sigma = 2$ (1).

Désignons par $|C|$ le système des sections hyperplanes de la surface F, par $|\Gamma|$ celui des sections hyperplanes de la surface Φ. Le système $|\Gamma|$ correspond au système formé par les sections C de F par les hyperplans

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_5 x_5 = 0.$$

Au système des courbes C découpées sur F par les hyperplans

$$\lambda_6 x_6 + \lambda_7 x_7 + \lambda_8 x_8 = 0, \qquad (3)$$

(1) Sur certaines surfaces algébriques de diviseur supérieur à l'unité. (*Bull. de l'Acad. des Sciences de Cracovie*, 1914, pp. 362-368.)

correspond sur Φ un système $|\Gamma_1|$ tel que

$$|2\Gamma| = |2\Gamma_1|.$$

En éliminant x_6, x_7 x_8 entre les équations (2) et (3), on obtient l'équation

$$\lambda_6^2\varphi_{11} + \lambda_7^2\varphi_{22} + \lambda_8^2\varphi_{33} + 2\lambda_7\lambda_8\varphi_{23} + 2\lambda_8\lambda_6\varphi_{13} + 2\lambda_6\lambda_7\varphi_{12} = 0 \quad (4)$$

des hypersurfaces de S_5 découpant sur Φ les courbes Γ_1. Ces hypersurfaces enveloppent la surface Φ et touchent donc celle-ci le long de courbes Γ_1 d'ordre 32.

Les courbes 2Γ, $2\Gamma_1$ appartiennent au système découpé sur Φ par les hyperquadriques V_4^2 de S_5.

3. Recherchons les valeurs des genres de la surface Φ, et dans ce but, commençons par rechercher celles des genres de la surface F.

Dans un espace S_6, l'intersection V_2^{16} de quatre hyperquadriques linéairement indépendantes est une surface projectivement canonique (c'est-à-dire dont les sections hyperplanes sont les courbes canoniques) [1]. Par conséquent, dans un espace S_7, quatre hyperquadriques linéairement indépendantes ont en commun une variété V_3^{16} à surfaces canoniques et pluricanoniques d'ordre zéro. Une cinquième hyperquadrique de S_7 coupe V_3^{16} suivant une surface V_2^{32} qui, sur V_3^{16}, est sa propre adjointe.

La surface V_2^{16} a les genres $p_a = p_g = 7$, $p^{(1)} = 17$ et par conséquent la surface V_2^{32} a les genres $p_a = p_g = 31$, $p^{(1)} = 129$. Le système canonique de la surface V_2^{32} est découpé sur cette surface par les hyperquadriques de S_7; par conséquent les sections hyperplanes de V_2^{32} sont des courbes « semi-canoniques ».

Considérons maintenant la variété V_3^{32} de S_8, intersection

[1] Voir F. ENRIQUES et L. CAMPEDELLI, *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche* (Padoue, 1932), pp. 356, 357.

de cinq hyperquadriques linéairement indépendantes. Les sections hyperplanes de cette variété sont des surfaces V_2^{32} et les adjointes de cette surface sont découpées par les hyperquadriques. On a donc

$$|(V_2^{32})'| = |2V_2^{32}|.$$

La variété V_3^{32} est projectivement canonique, ses sections hyperplanes en étant les surfaces canoniques. La surface V_2^{64}, intersection de la variété V_3^{32} et d'une hyperquadrique de S_8, a pour adjointes les sections de V_3^{32} par les hypersurfaces cubiques de S_8. La surface V_2^{64} a les genres $p_a = p_g = 191$, $p^{(1)} = 577$.

La surface V_2^{64}, comme la surface F, est l'intersection de six hyperquadriques linéairement indépendantes de S_8; elles ont donc les mêmes genres.

4. Entre les genres arithmétique p_a et linéaire $p^{(1)}$ de F et les genres arithmétique π_a et linéaire $\pi^{(1)}$ de Φ nous avons les relations [1]

$$p_a + 1 = 2(\pi_a + 1), \qquad p^{(1)} - 1 = 2(\pi^{(1)} - 1).$$

D'autre part, Φ est, comme F, une surface régulière et par conséquent les genres de la surface Φ ont pour valeurs $p_a = p_g = 95$, $p^{(1)} = 289$.

La surface représentée dans un espace linéaire à cinq dimensions par les équations obtenues en remplaçant, dans celles de la surface de Veronese, les coordonnées courantes par les premiers membres des équations de six hyperquadriques linéairement indépendantes, sans point commun, a les genres $p_a = p_g = 95$, $p^{(1)} = 289$ *et son diviseur de Severi est* $\sigma = 2$.

Liége, le 4 novembre 1937.

---

(1) Mémoire sur les surfaces algébriques doubles ayant un nombre fini de points de diramation (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1914, pp. 289-312); *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Paris, Hermann, 1935).

M. HAYEZ, Imprimeur de l'Académie royale de Belgique, rue de Louvain, 112, Bruxelles.