Extrait des *Bulletins de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences).
Séance du 8 janvier 1938, nº 1.

Sur les involutions cycliques appartenant à une variété algébrique et possédant une courbe unie,

par LUCIEN GODEAUX, Correspondant de l'Académie.

Dans une suite de recherches faites depuis 1912, nous avons cherché à édifier une théorie des involutions n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique [1]. Nous avons récemment cherché à étendre nos recherches aux involutions appartenant à une variété algébrique à trois dimensions et ayant soit un nombre fini de points unis, soit une courbe unie [2].

(¹) Nous avons résumé nos recherches dans un exposé sur : Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (*Actualités scientifiques et industrielles*, exposés de géométrie publiés sous la direction de M. E. Cartan. Paris, Hermann, 1935). Voir également : Recherches sur les involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à une surface algébrique (*Bull. de la Soc. Math. de France*, 1919, pp. 1-16); Recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1930, pp. 450-467; 1931, pp. 1131-1150, 1356-1365; 1935, pp. 338-344) et un travail qui paraîtra prochainement dans les *Mémoires* in-8º de l'Académie.

(²) Sur les involutions cycliques appartenant à une variété algébrique (*Comptes rendus du Congrès des Math. d'Oslo*, 1936, t. II, pp. 151-152); Sur deux involutions cycliques du troisième ordre appartenant à une variété algébrique à trois dimensions (*Bull. des Sc. Mathém.*, 1937, pp. 82-96); Recherches sur les involutions cycliques du troisième ordre appartenant à une variété algébrique à trois dimensions (*Annales de l'Ecole Normale supérieure*, 1937, pp. 55-79); Sur les variétés algébriques à trois dimensions, de genres un, contenant des involutions cycliques (*Bull. de la Soc. Math. de France*, en cours d'impression); Une variété algébrique à trois dimensions sur laquelle l'opération d'adjonction a la période trois (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1937, pp. 335-342); Sur les involutions cycliques appartenant à une variété algébrique de genres un (*Ibid.*, 1937, pp. 680-684).

Poursuivant ces recherches, nous étudions dans ce travail une involution cyclique d'ordre premier p, appartenant à une variété algébrique à trois dimensions, ayant une courbe unie telle que, dans la gerbe des tangentes à la variété en un point de cette courbe, l'involution détermine une homologie. Nous construisons une variété image de l'involution et montrons que la courbe de diramation est multiple d'ordre p pour cette variété. Nous déterminons ensuite le comportement, le long de cette courbe, des surfaces tracées sur la variété image.

1. Soit V une variété algébrique à trois dimensions contenant une involution cyclique I_p d'ordre p, possédant une courbe unie D, simple pour la variété. Soit T la transformation birationnelle de V en elle-même, de période p, génératrice de l'involution I_p. Nous supposerons p premier.

Considérons un point A de D et soit α l'espace linéaire à trois dimensions tangent à V en A. A une courbe algébrique quelconque passant par A et tracée sur V, T fait correspondre une courbe algébrique passant par A; par conséquent T détermine dans la gerbe des tangentes en A à V une homographie h. Cette homographie peut être l'identité, ou une homologie de période p ou une transformation non homologique de période p, présentant trois rayons unis si $p > 2$. Dans tous les cas, la tangente en A à la courbe D est unie pour l'homographie h.

2. Considérons un système linéaire de surfaces algébriques, $|L_1|$, simple, dépourvu de points-base, et soient $|L_2|$, $|L_3|$, ..., $|L_p|$ les systèmes que T, T^2, ..., T^{p-1} lui font correspondre. Le système linéaire

$$|F| = |L_1 + L_2 + \cdots + L_p|$$

est transformé en lui-même par T et contient un système linéaire $|F_1|$ composé au moyen de l'involution I_p. Les systèmes $|F|$, $|F_1|$ sont privés de points-base et leurs surfaces rencontrent la courbe D en un nombre de points multiple de p.

Le système $|F|$ peut éventuellement coïncider avec le système $|F_1|$, mais dans tous les cas, en prenant un multiple suffisamment élevé $|\lambda F|$ de $|F|$, on obtiendra un système linéaire transformé en lui-même par T, simple, contenant p systèmes linéaires partiels composés au moyen de l'involution I_p dont l'un, qui comprend les surfaces λF_1, est privé de points-base. Pour l'établir, il suffit de considérer l'involution cyclique déterminée par I_p sur une surface F_1 et d'appliquer à celle-ci la propriété analogue à la précédente et relative aux surfaces (1).

Cela étant, nous pouvons supposer, en changeant éventuellement de notation, que le système simple $|F|$ contient p systèmes linéaires partiels $|F_1|$, $|F_2|$, ..., $|F_p|$, composés au moyen de l'involution I_p, dont le premier est privé de points-base.

Si r est la dimension du système $|F|$, rapportons projectivement ses surfaces aux hyperplans d'un espace linéaire S_r à r dimensions. A la variété V correspond birationnellement une variété que nous désignerons encore par V. Nous désignerons de même par F les sections hyperplanes de V. Sur le nouveau modèle projectif de V, l'involution I_p est engendrée par une homographie T, de S_r, de période p, possédant p axes ponctuels que nous désignerons par $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, ..., $S^{(p)}$. Soit Σ_i le système des hyperplans unis de T passant par tous les axes ponctuels, sauf par $S^{(i)}$. Les systèmes linéaires $|F_1|$, $|F_2|$, ..., $|F_p|$, composés au moyen de I_p, sont respectivement découpés sur V par Σ_1, Σ_2, ..., Σ_p.

Le système $|F_1|$ étant dépourvu de points-base, les espaces $S^{(2)}$, $S^{(3)}$, ..., $S^{(p)}$ ne peuvent rencontrer la variété V. Il en résulte que la courbe unie D appartient à l'axe $S^{(1)}$.

(1) Voir notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique*. (*Loc. cit.*)

Soient A un point de D; a la tangente à D en A; α l'espace à trois dimensions tangent à V en A. La droite a appartient à l'espace $S^{(1)}$; l'espace α est uni pour l'homographie T. Nous supposerons que l'espace α n'a que la droite a en commun avec l'axe $S^{(1)}$, ce qui écarte le cas où T détermine l'identité dans la gerbe des tangentes à la variété V en A.

Dans l'espace α, T détermine une homographie h' de période p, donc générale. Deux cas peuvent se présenter :

1° L'espace α s'appuie suivant une droite a' sur l'un des espaces $S^{(2)}$, $S^{(3)}$, ..., $S^{(p)}$, par exemple sur le premier. L'homographie h' est biaxiale, les axes étant a, a' et l'homographie h est homologique.

2° L'espace α s'appuie suivant un point sur deux des espaces $S^{(2)}$, $S^{(3)}$, ..., $S^{(p)}$, par exemple en A'_2 sur $S^{(2)}$ et en A_3' sur $S^{(3)}$. L'homographie h' est axiale, l'axe ponctuel étant a; l'homographie h est non homologique et l'on a $p > 2$.

Dans cette note, nous nous limiterons à l'étude du premier cas.

3. Fixons l'attention sur une surface F_1, soit F_1^*, rencontrant la courbe D en des points simples; soit A un de ces points. Les surfaces F_1 passant par A sont tangentes en ce point au plan A a'.

Les ∞^2 groupes de I_p appartenant à la surface F_1^* forment sur cette surface une involution cyclique I_p^* d'ordre p n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Sur la surface F_1^*, les surfaces F_1 découpent un système linéaire dépourvu de points-base et composé au moyen de I_p^*; les courbes de ce système passant par A acquièrent la multiplicité p en ce point, les tangentes étant variables [1]. En effet, le point A est uni parfait pour l'involution I_p^*. Il en

[1] *Recherches sur les involutions douées d'un nombre fini...* (*Loc. cit.*)

résulte que les surfaces F_1 passant par un point A de D ont entre elles un contact d'ordre $p-1$ en ce point.

Soit r_1 la dimension du système $|F_1|$. Rapportons projectivement les surfaces du système $|F_1|$ aux hyperplans d'un espace linéaire à r_1 dimensions; il correspond à la variété V dans cet espace une variété algébrique Ω image de l'involution I_p. A la courbe D correspond une courbe de diramation Δ de Ω. Désignons par Φ_1 les sections hyperplanes de Ω, surfaces qui correspondent aux surfaces F_1 de V.

La surface Ω_1^*, qui correspond à la surface F_1^* et qui est l'image de l'involution I_p^* de cette surface, possède des points multiples d'ordre p, à cônes tangents rationnels et irréductibles, aux points de diramation (¹), c'est-à-dire aux points où elle rencontre la courbe Δ. Il en résulte que la courbe Δ est multiple d'ordre p pour la variété Ω.

4. Reprenons la surface F_1^* et considérons les systèmes linéaires de courbes découpées sur cette surface par les surfaces F_2, F_3, ..., F_p. Ces $p-1$ systèmes linéaires sont composés au moyen de l'involution I_p^* et ont pour points-base les points unis de cette involution, c'est-à-dire les points de rencontre de la surface F_1^* avec la courbe D.

Nous avons démontré que les courbes considérées ont, au point A, dans un certain ordre, les multiplicités un, deux, ..., $p-1$, les tangentes étant variables (²).

Les surfaces F_2 sont découpées sur V par les hyperplans de Σ_2; ces hyperplans ne contiennent pas $S^{(2)}$ et coupent par suite le plan A a', tangent en A à la surface F_1^*, suivant une droite variable. Par conséquent les courbes (F_1^*, F_2) ont un point simple en A et les surfaces F_2 passent simplement par la courbe D.

Cela étant, nous pouvons supposer avoir numéroté les

(¹) *Recherches sur les involutions douées d'un nombre fini...* (*Loc. cit.*)

(²) Sur les points unis parfaits des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique. (*Bull. de la Soc. roy. des Sc. de Liége*, 1937, pp. 37-50.)

espaces $S^{(3)}$, ..., $S^{(p)}$ de manière que les courbes (F_1^*, F_3) aient un point double en A, ..., les courbes (F_1^*, F_p) un point multiple d'ordre $p-1$. Pour des raisons de continuité, le comportement de ces courbes aux autres points unis de l'involution I_p^* sera le même.

Les hyperplans de Σ_3 passent par $S^{(1)}$ et $S^{(2)}$; ils contiennent donc l'espace tangent α à la variété V en A; les surfaces F_3 ont donc un point double au moins en A, et comme elles doivent rencontrer le plan A a' suivant des courbes ayant un point double à tangentes variables en A, elles ont un point double à cône tangent variable en A. Il en résulte que les surfaces F_3 passent deux fois par la courbe D, le cône tangent en un point A de cette courbe se décomposant en deux plans variables passant par la tangente α à la courbe D en A.

Les hyperplans de Σ_4 passant par $S^{(1)}$ et $S^{(2)}$, contiennent l'espace tangent à V en A et les surfaces F_4 ont un point double au moins en A. Par conséquent, ces surfaces passent $i \geqslant 2$ fois par la courbe D. Le cône tangent à une surface F_4 au point A se compose de i plans passant par la tangente a à D en A. Comme une surface F_4 doit couper le plan A a' suivant une courbe ayant un point triple en A, on a $i = 3$. Les surfaces F_4 ont donc D comme courbe triple, les plans tangents à ces surfaces en un point de D étant variables.

On démontre de même que les surfaces F_5, F_6 ..., F_p ont D comme courbe multiple d'ordre quatre, cinq, ..., $p-1$, les plans tangents en un point de D à ces surfaces étant variables.

5. Désignons par Φ_2, Φ_3, ..., Φ_p les surfaces qui correspondent sur la variété Ω respectivement aux surfaces F_2, F_3, ..., F_p.

Comme les surfaces F_2 rencontrent une surface F_1 suivant une courbe ayant des points simples aux points de rencontre de cette surface F_1 avec la courbe D, les surfaces Φ_2 sont rencontrées par les sections hyperplanes Φ_1 de Ω suivant des courbes ayant des points simples aux points de Δ. Il en résulte que les surfaces Φ_2 passent simplement par la courbe Δ.

Par un raisonnement analogue, on démontre que les surfaces Φ_3 passent doublement, les surfaces Φ_4 triplement, ..., les surfaces Φ_p $p-1$ fois par la courbe Δ.

La courbe multiple Δ de Ω est équivalente, au point de vue des transformations birationnelles, à une surface (réglée) que nous désignerons par le même symbole Δ.

Envisageons, sur la variété V, une surface F n'appartenant à aucun des systèmes $|F_1|$, $|F_2|$, ..., $|F_p|$. Il lui correspond sur Ω une surface Φ variable dans un système continu appartenant totalement à un système linéaire. Faisons varier F d'une manière continue dans $|F|$ en la faisant tendre vers une surface F_1; la surface Φ varie d'une manière continue sur Ω et tend vers une surface $p\Phi_1$. Faisons maintenant varier F d'une manière continue dans $|F|$ en la faisant tendre vers une surface F_i $(i=2, 3, ..., p)$; la surface Φ tend vers une surface $p\Phi_i+\lambda_i\Delta$, λ_i étant un entier. On en conclut que l'on a

$$|p\Phi_1| = |p\Phi_2+\lambda_2\Delta| = |p\Phi_3+\lambda_3\Delta| = \cdots = |p\Phi_p+\lambda_p\Delta|,$$

λ_2, λ_3, ..., λ_p étant des entiers.

Considérons l'intersection des systèmes précédents avec une surface Φ_1^* déterminée; nous avons

$$|p(\Phi_1^*,\Phi_1)| = |p(\Phi_1^*,\Phi_2)+\lambda_2(\Phi_1^*,\Delta)| = \cdots = |p(\Phi_1^*,\Phi_p)+\lambda_p(\Phi_1^*,\Delta)|,$$

relation fonctionnelle qui doit coïncider avec celle que nous avons établie pour les surfaces images d'involutions ayant des points unis parfaits appartenant à une surface algébrique (1). On a donc $\lambda_2=1$, $\lambda_3=2$, ..., $\lambda_p=p-1$ et par suite

$$|p\Phi_1| = |p\Phi_2+\Delta| = |p\Phi_3+2\Delta| = \cdots = |p\Phi_p+(p-1)\Delta|.$$

Liége, le 28 décembre 1937.

(1) *Sur les points unis parfaits... (Loc. cit.)*

M. HAYEZ, Imprimeur de l'Académie royale de Belgique, rue de Louvain, 112, Bruxelles.