EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liège*
Séance du 18 novembre 1937, n° 11.

Une observation sur les points unis des involutions d'ordre huit appartenant à une surface algébrique,

par LUCIEN GODEAUX, Membre de la Société.

Dans des travaux déjà anciens [1], nous avons étudié les involutions d'ordre huit et de genres un ($p_a = P_4 = 1$) appartenant à une surface de genres un. Parmi ces involutions, qui ne peuvent posséder qu'un nombre fini de points unis, il en est qui sont engendrées par deux transformations birationnelles de la surface en elle-même, de période quatre, dont les carrés coïncident. Envisageons une involution de cette espèce et un point uni de cette involution qui, compté huit fois, forme un groupe. Une surface normale, image de cette involution, étant de genres un, ne peut posséder de point de multiplicité supérieure à deux; le point de diramation correspondant au point uni considéré est donc double pour la surface image et précisément double uniplanaire ordinaire. On pourrait croire que la structure du point uni dépend de cette limitation de la multiplicité des points de diramation pour la surface image; il n'en est cependant rien, comme nous allons le montrer.

1. Soit F une surface algébrique contenant une involution I_8, d'ordre huit, engendrée par deux transformations birationnelles T_1, T_2 de période quatre de la surface en elle-même, telles que

$$T_1^2 = T_2^2.$$

La transformation birationnelle

$$T_3 = T_1 T_2 = (T_2 T_1)^3$$

est également de période quatre et on a

$$T_3^2 = T_1^2 = T_2^2.$$

Désignons par I_4', I_4'', I_4''' les involutions du quatrième ordre engendrées respectivement par T_1, T_2, T_3 et par I_2 l'involution du second ordre engendrée par $T = T_1^2$.

On peut prendre pour F une surface normale d'un certain espace linéaire S_r, telle que les transformations T_1, T_2, T_3 et

[1] Mémoire sur les involutions appartenant à une surface de genres un (*Annales de l'École normale supérieure*, 1914, pp. 357-430; 1919, pp. 51-70); Sur les involutions d'ordre huit appartenant à une surface de genre un (*Mémoires in-8° de l'Acad. roy. de Belgique*, 1924, pp. 1-33).

par suite T soient des homographies, satisfaisant aux conditions suivantes :

a) L'homographie T possède deux axes ponctuels σ_1, σ_2 dont un seul, σ_1, rencontre la surface F;

b) Il existe, dans l'espace σ_1, quatre espaces σ_{10}, σ_{11}, σ_{12}, σ_{13}, deux-à-deux gauches, formés de points unis pour les trois homographies T_1, T_2, T_3. Les espaces linéaires déterminés par σ_{10} et σ_{11}, σ_{12} et σ_{13} sont des axes ponctuels de T_1; les espaces linéaires déterminés par σ_{10} et σ_{12}, σ_{13} et σ_{11} sont des axes ponctuels de T_2; enfin les espaces linéaires déterminés par σ_{10} et σ_{13}, σ_{11} et σ_{12} sont des axes de T_3. Seul l'espace σ_{10} rencontre la surface F;

c) Dans l'espace σ_2, il existe deux axes ponctuels σ_{211}, σ_{212} de T_1, deux axes ponctuels σ_{221}, σ_{222} de T_2 et deux axes ponctuels σ_{231}, σ_{232} de T_3. Ces six espaces sont deux-à-deux gauches.

Ce point, établi dans le cas où F est de genres un, subsiste quelle que soit la surface F, comme nous l'avons fait remarquer dans le dernier de nos travaux cités.

2. Dans l'espace σ_2, T_1, T_2, T_3 déterminent des transformations involutives formant un groupe trirectangle. Les axes σ_{211}, σ_{212} de T_1 sont échangés entre eux par T_2, T_3; les axes σ_{221}, σ_{222} de T_2 le sont par T_3, T_1; les axes σ_{231}, σ_{232} par T_1 et T_2.

Soient P_1 un point de σ_{211}, P_2 le point de σ_{212} que T_2 et T_3 font correspondre à P_1. La droite P_1P_2 est unie pour les trois transformations T_1, T_2, T_3 et par conséquent elle s'appuie sur les axes σ_{221}, σ_{222}, σ_{231}, σ_{232}. Ces espaces linéaires et σ_{211}, σ_{212} ont même dimension et la droite P_1P_2, lorsque P_1 varie dans σ_{211}, engendre une variété de Segre (1).

Cela étant, soit A un point uni de l'involution I_8, qui, compté huit fois, forme un groupe de l'involution. Ce point appartient donc à l'espace σ_{10}. Le plan tangent α à la surface F au point A est uni pour les homographies T_1, T_2, T_3; il doit donc s'appuyer sur les axes de ces homographies appartenant à l'espace σ_2.

Supposons que le point A soit uni parfait pour l'involution I_4' engendrée par T_1. Le plan α s'appuie alors suivant une droite sur l'un des espaces σ_{211}, σ_{212}, par exemple sur le premier. Le plan α étant uni pour T_2, T_3, la droite *a* d'intersection de ce plan et de σ_{211} doit être unie pour ces homographies; cette droite *a* doit donc s'appuyer sur les espaces σ_{221}, σ_{222}, σ_{231}, σ_{232}. Mais cela entraînerait que ces espaces rencontrent σ_{211}, ce qui

(1) Cf. MARLETTA, Sistemi lineari d'omografie, che sono gruppi. (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1918-1919, pp. 269-351.) Voir § 5.

est impossible. Par conséquent, le point A est uni non parfait pour I_4' et, naturellement, pour I_4'' et I_4'''.

Dans ces conditions, le plan α s'appuie en un point sur chacun des espaces σ_{211}, ..., σ_{232} et, comme nous l'avons établi dans notre dernier travail cité, le point de diramation correspondant sur une surface normale image de l'involution I_8 est double uniplanaire ordinaire pour cette surface.

3. L'observation que nous avions en vue est ainsi établie. Nous ferons remarquer pour terminer qu'il peut exister des groupes de l'involution I_8 formés de deux points distincts unis pour l'involution I_4' mais non pour I_4'', I_4'''. Dans le cas où la surface F et l'involution I_8 sont de genres un, le point de diramation correspondant sur la surface image de I_8 est un point double biplanaire auquel est infiniment voisin un point double conique. Dans le cas général, il peut en être autrement; le point de diramation peut être un point quadruple conique, à cône tangent rationnel. C'est ce que nous allons faire voir.

Soient A_1, A_2 deux points unis de I_4', transformés l'un dans l'autre par T_2, T_3. Ils forment un groupe de I_8 et appartiennent à l'espace déterminé par σ_{10}, σ_{11} mais non à ces espaces. Si les points A_1, A_2 sont unis non parfaits pour I_4', on retrouve le résultat obtenu dans le cas des surfaces de genres un. Supposons que A_1 soit un point uni parfait de I_4'; il en est alors de même de A_2. L'espace α_1, tangent à F en A_1, rencontre suivant une droite l'un des espaces σ_{211}, σ_{212}, par exemple le premier. Le plan tangent α_2 à F en A_2 rencontre alors σ_{212} suivant une droite.

Les hyperplans passant par les espaces σ_2, σ_{12}, σ_{13} sont unis pour l'homographie T_1, mais non pour les homographies T_2, T_3. Ils découpent sur F les courbes d'un système linéaire $|C_1|$ composé au moyen de l'involution I_4' et dépourvu de points-base.

Les hyperplans passant par les espaces σ_1 et σ_{212} sont également unis pour T_1 et découpent sur F un système linéaire $|C_1'|$ également composé au moyen de I_4', ayant pour points-base les points unis de cette involution.

Les courbes C_1 passant par le point A_2 y acquièrent un point multiple à tangentes variables. Une courbe C_1' doit couper ces courbes en quatre points absorbés en A_1, donc les courbes C_1 passant par A_1 ont la multiplicité quatre en ce point.

Soit r_1 la dimension de $|C_1|$. Rapportons projectivement les courbes C_1 aux hyperplans d'un espace linéaire S_{r_1} à r_1 dimensions. A la surface F correspond une surface Ψ_1, normale, image de l'involution I_4'. Le point de diramation A_1', homologue de A_1, est un point quadruple à cône tangent rationnel de la surface Ψ_1. Il en est de même du point de diramation A_2' homologue de A_2.

Aux involutions I_4'', I_4''' correspond sur Ψ_1 une involution du second ordre engendrée par une homographie involutive T', échangeant entre eux les points A_1', A_2'. Une surface normale Φ, image de cette involution, est une image de l'involution I_8. Il en résulte que le point de diramation A_{12}', qui correspond sur Φ au couple A_1A_2, est un point quadruple à cône tangent rationnel de la surface.

Liége, le 26 octobre 1937.

M. HAYEZ, imprimeur de l'Académie royale de Belgique, rue de Louvain, 112, Bruxelles.