SUR LA
STRUCTURE DES POINTS UNIS
DES INVOLUTIONS CYCLIQUES
APPARTENANT A UNE SURFACE ALGÉBRIQUE

Nous nous sommes occupé à maintes reprises de l'étude des involutions ne présentant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique (1). Si F est une surface algébrique contenant une involution I_p d'ordre premier p, cyclique, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, la transformation birationnelle T de F en elle-même, génératrice de l'involution I_p, donne l'identité ou non dans le domaine d'un point uni A de l'involution. Dans le premier cas, le point A est uni parfait, dans le second, il est uni non parfait. Soient Φ une surface image de l'involution et A′ le point de diramation homologue du point uni A. Si A est un point uni parfait, nous avons établi que le point A′ est équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à une courbe rationnelle de degré $-p$. Si A est un point uni non parfait, le point A′ équivaut à un certain ensemble de courbes rationnelles. Pour déterminer cet ensemble, il faut étudier ce que nous appelons la structure du point uni A.

---

(1) Nous avons résumé nos recherches sur cet objet dans notre exposé *Sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES, n° 270), Paris, Hermann, 1935.

Dans le domaine du premier ordre d'un point uni non parfait, la transformation T détermine une involution cyclique possédant deux points unis A_1, A_2. Dans l'ensemble des points du domaine du second ordre de A, infiniment voisins du point A_1, T détermine l'identité ou non. Dans le premier cas, A_1 est uni parfait; dans le second, T détermine dans l'ensemble considéré une involution d'ordre p ayant deux points unis A_{11}, A_{12}. De même, A_2 est uni parfait ou possède deux points unis A_{21}, A_{22}, infiniment voisins dans deux directions différentes. Le raisonnement sera repris pour les points A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22} et ainsi de suite. On obtiendra ainsi une sorte d'arbre dont les branches se terminent à des points unis parfaits. La construction de cet arbre donne la structure du point uni non parfait A.

Choisissons pour modèle projectif de la surface Φ une surface dont les sections hyperplanes ne rencontrent pas en général les courbes rationnelles composant les différents points de diramation de la correspondance $(1, p)$ existant entre Φ et F. Aux sections hyperplanes de la surface Φ correspondent sur F des courbes C formant un système linéaire en général incomplet, composé au moyen de l'involution I_p. Les courbes C ne passent pas, en général, par les points unis de l'involution I_p. Considérons les courbes C passant par le point uni non parfait A; elles ont en ce point une certaine multiplicité supérieure à l'unité et inférieure à p, et des tangentes fixes coïncidant avec AA_1 et AA_2. Appelons C′ ces courbes. Les courbes C′ ont en commun le point A, les points A_1, A_2 du domaine du premier ordre de A et un certain nombre de points unis de l'involution I_p, infiniment voisins successifs de A_1 et de A_2. Elles suivent en quelque sorte, dans les domaines successifs du point A, certaines branches de l'arbre dont il a été question plus haut. Les derniers points fixes que ces courbes ont en commun dans le domaine de A sont des points unis parfaits de l'involution I_p et aux domaines de ces points correspondent, sur la surface Φ, des courbes rationnelles (infiniment petites) entrant dans la composition du point de diramation A'. Il ne suffira d'ailleurs pas, en général, de se limiter à la considération des courbes C' pour obtenir la composition du point singulier A'; il faudra en général considérer encore les courbes C' assujetties à la condition d'avoir, en A, une tangente distincte des droites AA_1, AA_2, et ainsi de suite.

Déjà dans le cas où la surface F est un plan et T une homographie cyclique non homologique, le problème dont il vient d'être question présente certaines difficultés [1]. Lorsque la surface F est une surface algébrique quelconque, nous avons résolu le problème dans deux cas [2] :

1° Lorsque l'un des points A_1 ou A_2 est uni parfait (le cas où A_1, A_2 sont tous deux unis parfaits correspond à $p=3$);

2° Lorsque la structure du point uni A présente un caractère de symétrie par rapport à A_1, A_2. Les courbes C' ont alors un point double en A et les deux branches de ces courbes d'origine A ont des comportements semblables dans le domaine de ce point.

Dans un travail qui paraîtra prochainement dans le *Bulletin de la Société Mathématique de France*, où nous nous sommes occupé de la construction de variétés algébriques à trois dimensions privées de surfaces canoniques, mais possédant certaines surfaces pluricanoniques, nous avons été conduit à considérer un troisième cas. Celui-ci peut

---

(1) *Sur les homographies planes cycliques* (MÉMOIRES DE LA SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES DE LIÉGE, 1928, pp. 1-26); *Sur les surfaces représentant les involutions planes engendrées par des homographies cycliques* (IBID., 1930, pp. 1-21); *Sur les courbes tracées sur la surface représentant l'involution engendrée par une homographie plane cyclique* (IBID., 1931, pp. 1-14).

(2) *Recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique.* (BULLETINS DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE, 1930, pp. 450-467; 1931, pp. 1131-1150, 1356-1364; 1935, pp. 338-344.)

être caractérisé par le fait que les courbes C′ ont un point triple en A, deux des tangentes en ce point coïncidant avec AA_1, la troisième avec AA_2. Nous établissons qu'au point de diramation A′, la surface Φ possède un point triple, le cône tangent étant formé d'un plan et d'un cône du second ordre se rencontrant suivant une droite. A ce point triple sont infiniment voisins successifs des points biplanaires auxquels fait suite, soit un point double conique, soit un point double biplanaire ordinaire.

Pour arriver à ces résultats, nous avons ramené le problème de la détermination de la structure du point uni A à un problème du plan et précisément à la détermination de la structure du point uni A pour l'homographie engendrée par la transformation T dans le plan tangent à la surface F au point A.

Le point de diramation A′ est équivalent à un ensemble de courbes rationnelles dont l'une a le degré —**3** et les autres le degré —**2**. Les courbes canoniques de la surface Φ, si elles existent, doivent rencontrer en un point la courbe de degré —**3**, mais ne rencontrent pas les courbes de degré —**2**.

1. — Soit F une surface algébrique contenant une involution I_p, cyclique, d'ordre premier p supérieur à deux, n'ayant qu'un nombre fini de points unis.

Construisons sur F un système linéaire $|C|$, complet, simple, dépourvu de points-base, transformé en lui-même par la transformation birationnelle T de la surface F en soi, génératrice de l'involution I_p. Nous supposerons remplies les conditions suivantes [1] :

Le système linéaire $|C|$ contient p systèmes linéaires partiels $|C_1|$, $|C_2|$, ... $|C_p|$ composés au moyen de l'involution I_p;

---

[1] Voir notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique*. Paris, Hermann, 1935.

L'un de ces systèmes, pour fixer les idées $|C_1|$, est dépourvu de points-base.

Nous savons d'ailleurs que l'on peut supposer les dimensions des systèmes $|C_1|$, $|C_2|$, ..., $|C_p|$ aussi grandes qu'on le veut; il suffit de remplacer $|C|$ par un de ses multiples d'ordre suffisamment élevé.

Soit r la dimension du système $|C|$. Rapportons projectivement les courbes C aux hyperplans d'un espace linéaire S_r à r dimensions. La surface F se transforme birationnellement en une surface normale que nous désignerons encore par F; l'ordre de cette surface est nécessairement multiple de p; nous le désignerons par pn. A la transformation T correspond une homographie de période p de S_r, que nous désignerons encore par T; cette homographie transforme F en elle-même.

D'après les hypothèses faites sur le système $|C|$, l'homographie T possède p axes ponctuels que nous désignerons par $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, ..., $S^{(p)}$; les hyperplans unis, passant par p—1 de ces axes, découpent sur F les courbes de l'un des systèmes $|C_1|$, $|C_2|$, ..., $|C_p|$. Nous supposerons que les courbes C_i sont découpées sur F par les hyperplans unis ne passant pas par l'espace $S^{(i)}$. Les hyperplans passant par les espaces $S^{(2)}$, $S^{(3)}$, ..., $S^{(p)}$ découpent donc sur F les courbes du système $|C_1|$ et ce système étant par hypothèse dépourvu de points-base, les espaces $S^{(2)}$, $S^{(3)}$, ..., $S^{(p)}$ ne peuvent rencontrer la surface F. Les points unis de l'involution I_p appartiennent donc à l'espace $S^{(1)}$. Inversement, un point commun à F et à l'espace $S^{(1)}$ est uni pour I_p; l'espace $S^{(1)}$ ne rencontre donc F qu'en un nombre fini de points. Nous supposerons que ces points sont des points unis ordinaires de I_p, c'est-à-dire qu'aucune tangente à F en un de ces points n'appartient à $S^{(1)}$.

2. — Soit A un point uni de l'involution I_p, commun par conséquent à F et à $S^{(1)}$. Le plan tangent α à la surface F

au point A est uni pour l'homographie T; il ne rencontre l'espace $S^{(1)}$ qu'au seul point A et s'appuie donc suivant une droite sur l'un des espaces $S^{(2)}$, $S^{(3)}$, ..., $S^{(p)}$, ou suivant des points sur deux de ces espaces. Dans le premier cas, le point A est uni parfait pour l'involution I_p; dans le second, il est uni non parfait. C'est dans ce second cas que nous nous placerons ici; pour fixer les idées, nous supposerons que le plan α s'appuie en un point A_2 sur l'espace $S^{(2)}$ et en un point A_3 sur l'espace $S^{(3)}$.

Désignons par r_1 la dimension du système $|C_1|$ et rapportons projectivement les courbes de ce système aux hyperplans d'un espace S_{r_1} à r_1 dimensions. A la surface F correspond dans cet espace une surface Φ, normale, d'ordre n, image de l'involution I_p.

Au point A correspond, sur la surface Φ, un point de diramation A' qui est singulier pour cette surface. Il s'agit de déterminer cette singularité, et dans ce but, il faut étudier les singularités en A' des sections hyperplanes de la surface Φ passant par ce point.

Désignons par Γ les sections hyperplanes de la surface Φ, par Γ' les courbes Γ passant par A'. Aux courbes Γ correspondent sur F les courbes C_1 et aux courbes Γ' les courbes C_1 passant par le point A. Ces courbes, que nous désignerons par C_1', ont en A un point double au moins, multiple d'ordre $p-1$ au plus, et des tangentes fixes en ce point. Ces tangentes sont unies pour l'homographie T et sont donc les droites $a_2 = AA_2$, $a_3 = AA_3$.

Le système $|C_1'|$ a la dimension r_1-1; rapportons projectivement les courbes C_1' aux hyperplans d'un espace linéaire S_{r_1-1} à r_1-1 dimensions. Il correspond à F une surface Φ_1, image de l'involution I_p, projectivement identique à la projection, à partir de A', de la surface Φ sur un hyperplan de l'espace S_{r_1}. Aux points de la surface Φ, infiniment voisins du point de diramation A', correspondent sur Φ_1 les points d'un ensemble de courbes isolées. On peut parvenir à la détermination de ces courbes de la manière suivante :

Reprenons les courbes C_1'. Ces courbes ayant des tangentes fixes en A, leurs différentes branches ayant ce point pour origine ont en commun un certain nombre de points fixes, unis pour l'involution I_p, infiniment voisins successifs de A. Soit, sur une de ces branches, P le dernier point fixe commun à toutes les courbes C_1'. Le point P est uni parfait pour l'involution I_p et aux points infiniment voisins de P correspondent, sur la surface Φ_1, les points d'une courbe rationnelle γ, appartenant à l'ensemble dont il a été question plus haut.

Les courbes Γ' de Φ ont pour homologues, sur Φ_1, les sections hyperplanes de cette surface; nous désignerons encore celles-ci par le même symbole Γ', ce qui ne prête à aucune ambiguïté. Si les courbes C_1' ont en P la multiplicité k, les courbes Γ' rencontrent la courbe γ en k points et cette courbe est donc d'ordre k.

3. — Les courbes C_1' assujetties à avoir en A une tangente distincte de a_2, a_3 forment un système linéaire de dimension $r_1—2$ et ont en A un point triple à tangentes variables si $p=3$, un point multiple à tangentes fixes a_2, a_3 si p est supérieur à trois. Plaçons-nous dans ce dernier cas et désignons les courbes en question par C_1''. A ces courbes correspondent sur la surface Φ_1 des sections hyperplanes, que nous désignerons par Γ'', passant par un point A_1' de la surface. En rapportant projectivement les courbes C_1'' aux hyperplans d'un espace linéaire à $r_1—2$ dimensions, nous obtenons une surface Φ_2, image de l'involution I_p, projectivement identique à la projection de la surface Φ_1, à partir de A_1', sur un hyperplan de l'espace S_{r_1-1}.

On recommencera, pour les courbes C_1'' le même raisonnement que pour les courbes C_1', ce qui permettra d'établir la singularité éventuelle du point A_1' pour la surface Φ_1 et la projection de cette singularité sur la surface Φ_2.

On considérera ensuite les courbes C_1''' obtenues en imposant aux courbes C_1'' d'avoir en A une tangente distincte de a_2, a_3, et ainsi de suite. On parviendra finalement à un système $C_1^{(v)}$ formé de courbes ayant en A la multiplicité p et des tangentes variables. La surface Φ_v, d'ordre $n-p$, obtenue en rapportant les courbes $C_1^{(v)}$ aux hyperplans d'un espace de dimension convenable, sera une image de l'involution I_p. Aux groupes de p points de F, infiniment voisins de A et formant des groupes de I_p, correspondront sur Φ_v les points d'une droite, simple pour la surface.

4. — Les courbes C_2, C_3, ..., C_p étant découpées sur F par des hyperplans contenant l'espace $S^{(1)}$, passent par le point A et y ont certaines singularités.

Considérons le système complet $|2C|$; il contient p systèmes linéaires partiels composés au moyen de I_p et qui peuvent être caractérisés par le fait qu'ils contiennent respectivement les courbes

$$2C_1, \quad C_1+C_2, \quad C_1+C_3, \ldots, C_1+C_p.$$

Nous les désignerons respectivement par

$$|2C_1|, \quad |C_1+C_2|, \quad |C_1+C_3|, \ldots, |C_1+C_p|.$$

Le premier est dépourvu de points-base; les $p-1$ suivants ont en particulier A comme point-base et leurs courbes ont le même comportement en ce point que respectivement les courbes C_2, C_3, ..., C_p.

Une courbe de l'un des systèmes $|C_2|$, $|C_3|$, ..., $|C_p|$ appartient nécessairement comme partie à l'une des courbes du système linéaire partiel $|2C_1|$; elle est complétée par une courbe appartenant à l'un de $p-1$ systèmes linéaires considérés. Pour préciser, posons $p=2\rho+1$ et considérons, par exemple, une courbe C_2; elle appartient à quelques courbes du système linéaire partiel $|2C_1|$ et les courbes résidus appartiennent à l'un des systèmes $|C_3|$,

$|C_1|, \ldots, |C_p|$. Supposons, pour fixer les idées, que ce soit au système $|C_p|$. De même, supposons qu'une courbe C_3 et une courbe C_{p-1} forment une courbe du système partiel $|2C_1|$, et ainsi de suite. Plus généralement, nous supposerons que les courbes

$$2C_1, \quad C_2 + C_p, \quad C_3 + C_{p-1}, \ldots, C_{\rho+1} + C_{p-\rho+1}$$

appartiennent au système linéaire partiel composé au moyen de l'involution I_p, compris dans $|2C|$, dépourvu de points-base.

Les courbes C_2, C_3, ..., C_p ne peuvent avoir en A une multiplicité supérieure à p et, d'autre part, une de ces courbes ne peut avoir en A la multiplicité p, car alors elle appartiendrait au système $|C_1^{(\nu)}|$. On en conclut que les courbes

$$C_2 + C_p, \quad C_3 + C_{p-1}, \ldots, C_{\rho+1} + C_{p-\rho+1}$$

appartiennent, dans un certain ordre, aux systèmes $|C_1'|$, $|C_1''|$, ..., $|C_1^{(\nu-1)}|$. Deux ou plusieurs des courbes considérées peuvent d'ailleurs appartenir à un même système, de sorte que l'on peut conclure de ce qui précède $\rho \leqslant \nu - 1$.

5. — Les développements qui précèdent montrent que pour déterminer la nature de la singularité du point A′ pour la surface Φ, nous devrons étudier la structure du point uni A de l'involution I_p. Cette dernière étude peut se ramener à une question de géométrie plane.

Considérons, dans S_r, un hyperplan passant par $S^{(2)}$, $S^{(3)}$, ..., $S^{(p)}$, mais non par A; un hyperplan passant par $S^{(1)}$, $S^{(3)}$, ..., $S^{(p)}$, mais non par A_2; un hyperplan passant par $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, $S^{(4)}$, ..., $S^{(p)}$, mais non par A_3. Ces trois hyperplans ont en commun un espace linéaire S_{r-3} à r—3 dimensions, uni pour l'homographie T et ne rencontrant pas le plan α. Projetons les courbes C_1, C_2, ..., C_p de cet espace S_{r-3} sur le plan α; nous obtenons des courbes, appartenant à des systèmes non linéaires, transformées en elles-mêmes par l'homographie T et ayant en A les mêmes singularités que les courbes C_1, C_2, ..., C_p.

Dans le plan α, l'homographie T détermine une homographie H non homologique, ayant comme points unis A, A_2 et A_3. Les projections des courbes C_1, C_2, ..., C_p sur le plan α sont des courbes d'ordre np appartenant totalement à p systèmes linéaires (partiels) composés au moyen de l'involution I_p' engendrée par H. Nous sommes donc ramené à l'étude des singularités au point A des courbes d'ordre np transformées en elles-mêmes par H. Ces singularités sont d'ailleurs les mêmes que celles des courbes d'ordre p jouissant de la même propriété.

6. — Prenons comme figure de référence, dans le plan α, le triangle formé par les points unis A, A_2, A_3 de l'homographie H, le point A ayant pour coordonnées (1, 0, 0). Les équations de l'homographie H peuvent s'écrire sous la forme

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^\tau x_3,$$

ε étant une racine primitive d'ordre p de l'unité et τ étant un entier compris entre 1 et p.

Considérons [1], dans le plan α, le système linéaire $|C|$ formé par les courbes d'ordre p. Dans ce système, de dimensions $r = \frac{1}{2}p\,(p+3)$, il y a p systèmes linéaires partiels $|C_1|$, $|C_2|$, ..., $|C_p|$ composés au moyen de l'involution I_p' d'ordre p engendrée par H. Soient r_1, r_2, ..., r_p les dimensions respectives de ces systèmes. Observons que l'un de ceux-ci, $|C_1|$, est dépourvu de points-base, les autres ayant pour points-base les points unis A, A_2, A_3 de H.

Sur une courbe $\overline{C}_1$ de $|C_1|$, H détermine une involution

---

(1) Nous conservons, pour les systèmes de courbes considérés dans le plan α et sur l'image de l'involution I_p', les mêmes notations que dans le cas de la surface F et de l'involution I_p. Ceci ne peut amener aucune confusion et nous a paru plus simple.

d'ordre p, privée de points unis, ayant comme image une courbe Γ dont le genre est par suite égal à $\frac{1}{2}(p-3)+1$, d'après la formule de Zeuthen. Les courbes $C_1, C_2, \ldots, C_p$ découpent sur la courbe $\overline{C}_1$ des séries linéaires d'ordre p^2, de dimensions respectives $r_1-1, r_2, \ldots, r_p$. A ces séries correspondent sur la courbe Γ des séries linéaires d'ordre p, donc non spéciales, dont la dimension est, par le théorème de Riemann-Roch, égale à $\frac{1}{2}(p+1)$. Si nous posons $p=2\rho+1$, nous aurons donc

$$r_1=\rho+2, \quad r_2=r_3=\cdots=r_p=\rho+1.$$

En rapportant projectivement les courbes C_1 aux hyperplans d'un espace linéaire $S_{\rho+2}$ à $\rho+2$ dimensions, aux groupes de I_p' correspondent les points d'une surface Φ, d'ordre p, image de l'involution I_p'. Au point A correspond sur la surface Φ un point A'; il s'agit de déterminer la singularité de Φ au point A', et dans ce but, nous aurons à étudier les singularités en A des courbes C_1 passant par ce point.

Les courbes C_1 ont une équation de la forme

$$\Sigma \lambda_{ik}\, x_1^{i(\tau-1)-(k-1)p}\, x_2^{kp-\tau i}\, x_3^{i}=0,$$

où k est un entier pouvant prendre les valeurs 0, 1, 2, ..., τ, et i un entier satisfaisant à la double inégalité.

$$(k-1)\frac{p}{\tau-1} \leq i \leq k\frac{p}{\tau}.$$

Les courbes C_1 passant par A sont caractérisées par $\lambda_{00}=0$; elles ont en ce point des tangentes fixes, coïncidant avec les droites $x_2=0$, $x_3=0$. Nous devrons donc étudier les singularités des courbes en question aux points infiniment voisins de A situés sur ces droites. Dans ce but, nous utiliserons deux transformations quadratiques.

La transformation quadratique T_1, d'équations

$$x_1 : x_2 : x_3 = z_1^2 : z_1 z_2 : z_2 z_3, \qquad (T_1)$$

dont l'inverse est

$$z_1 : z_2 : z_3 = x_1 x_2 : x_2^2 : x_1 x_3, \qquad (T_1^{-1})$$

fait correspondre au point infiniment voisin de A situé sur la droite $x_3 = 0$, le point de coordonnées $z_1 = 1$, $z_2 = z_3 = 0$.

De même, la transformation quadratique T_2 d'équations

$$x_1 : x_2 : x_3 = z_1^2 : z_2 z_3 : z_1 z_3 \qquad (T_2)$$

et d'équations inverses

$$z_1 : z_2 : z_3 = x_1 x_3 : x_1 x_2 : x_3^2 \qquad (T_2^{-1})$$

fait correspondre le point (1, 0, 0) au point infiniment voisin de A situé sur la droite $x_2 = 0$.

Nous aurons d'ailleurs souvent à utiliser des puissances de T_1, T_2, à savoir

$$x_1 : x_2 : x_3 = z_1^{\lambda+1} : z_1^{\lambda} z_2 : z_2^{\lambda} z_3 \qquad (T_1^{\lambda})$$

et

$$x_1 : x_2 : x_3 = z_1^{\lambda+1} : z_2 z_3^{\lambda} : z_1^{\lambda} z_3. \qquad (T_2^{\lambda}).$$

7. — Dans nos recherches sur les involutions cycliques appartenant à une variété algébrique à trois dimensions, auxquelles nous avons fait allusion plus haut, nous avons été conduit à considérer des involutions appartenant à des surfaces et telles que, reprenant les notations précédentes, les courbes C_1 assujetties à la seule condition de passer par A ont en ce point la multiplicité trois (et deux tangentes fixes a_2, a_3). Dans ce cas et pour le plan α, les tangentes aux courbes C_1 doivent être confondues, deux avec $x_2 = 0$ ou $x_3 = 0$, la troisième avec $x_3 = 0$ ou $x_2 = 0$. Nous devons donc trouver des entiers i, k, τ satisfaisant, soit aux équations

$$i(\tau - 1) - (k - 1)p = p - 3, \quad kp - \tau i = 2, \quad i = 1,$$

soit aux équations

$$i(\tau - 1) - (k - 1)p = p - 3, \quad kp - \tau i = 1, \quad i = 2.$$

Dans le premier cas, on a $k = 1$, $\tau = p - 2$; dans le second, $k = 1$, $\tau = \frac{1}{2}(p - 1) = \rho$.

Le second cas se ramène d'ailleurs au premier par un changement de notations, car on a

$$(\varepsilon^{\rho})^{p-2} = \varepsilon.$$

Nous supposons donc, dans ce qui va suivre, $\tau = p-2$. Nous aurons d'ailleurs à considérer deux cas : $p = 6\nu + 1$ et $p = 6\nu + 5$.

8. — Commençons par considérer le cas $p = 6\nu + 1$. L'équation du système $|C_1|$ peut s'écrire sous la forme

$$\begin{gathered}\lambda_0 x_1^p + \lambda_1 x_1^{p-3} x_2^2 x_3 + \cdots + \lambda_i x_1^{p-3i} x_2^{2i} x_3^i + \cdots + \lambda_{2\nu} x_1 x_2^{4\nu} x_3^{2\nu} \\ + \lambda_{2\nu+1} x_1^{3\nu-1} x_2 x_3^{3\nu+1} + \cdots + \lambda_{2\nu+j} x_1^{3\nu-3j+2} x_2^{2j-1} x_3^{3\nu+j} + \cdots + \lambda_{3\nu} x_1^2 x_2^{2\nu-1} x_3^{4\nu} \\ + \lambda_{3\nu+1} x_2^p + \lambda_{3\nu+2} x_3^p = 0.\end{gathered}$$

Rapportons projectivement ces courbes aux hyperplans d'un espace $S_{\ \ +2}$ en posant

$$\begin{gathered}\rho X_i = x_1^{p-3i} x_2^{2i} x_3^i, \qquad \rho X_{2\nu+j} = x_1^{3\nu-3j+2} x_2^{2j-1} x_3^{3\nu+j}, \\ \rho X_{3\nu+1} = x_2^p, \qquad \rho X_{3\nu+2} = x_3^p, \\ (i = 0, 1, \ldots, 2\nu; \qquad j = 1, 2, \ldots, \nu).\end{gathered}$$

Ces équations sont les équations paramétriques de la surface Φ.

Dans l'espace $S_{3\nu+2}$, nous désignerons par O_k le point dont toutes les coordonnées sont nulles, sauf X_k.

Les courbes C_1', c'est-à-dire les courbes C_1 passant par A, sont caractérisées par $\lambda_0 = 0$; elles ont en A un point triple, deux tangentes coïncidant avec $x_2 = 0$, la dernière avec $x_3 = 0$.

Opérons sur les courbes C_1' la transformation T_1^{λ}; il vient, après division par ${z_2}^{\lambda+2}$,

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{2\nu} \lambda_i z_1^{p(\lambda+1)-i(\lambda+3)} z_2^{(i-1)(\lambda+2)} z_3^i + \sum_{j=1}^{\nu} z_1^{(\lambda+1)(3\nu-3j+2)+\lambda(2j-1)} z_2^{\lambda(3\nu-1)+j(\lambda+2)-3} z_3^{3\nu+j} \\ + \lambda_{3\nu+1} z_1^{p\lambda} z_2^{p-(\lambda+2)} + \lambda_{3\nu+2} z_2^{\lambda(p-1)-2} z_3^p = 0.\end{gathered}$$

Pour $\lambda = 1, 2, \ldots, p-4$, le terme de degré le plus élevé en z_1 est le premier (de coefficient λ_1). Pour $\lambda = p-3$, il y a deux termes de degré le plus élevé en z_1 et l'équation précédente s'écrit

$$z_1^{p(p-3)}(\lambda_1 z_3 + \lambda_{3\nu+1} z_2) + \lambda_2 z_1^{p(p-4)} z_2^{p-1} z_3^2 + \cdots + \lambda_{3\nu+2}\, z_2^{p(p-4)+1} z_3^p = 0.$$

Les courbes C_1' ont en commun une suite de $p-3$ points simples infiniment voisins successifs de A, le premier de ces points étant situé sur $x_3=0$. Tous ces points sont unis pour l'involution I_p' et le dernier est uni parfait. Nous allons rechercher quelle est la courbe qui correspond, sur la surface Φ_1, au domaine de ce point, Φ_1 étant la projection de Φ à partir du point O_0 sur l'hyperplan $X_0=0$.

Les équations paramétriques de Φ_1 peuvent s'écrire

$$\frac{X_1}{z_1^{p(p-3)} z_3} = \frac{X_2}{z_1^{p(p-4)} z_2^{p-1} z_3^2} = \cdots = \frac{X_{3\nu+1}}{z_1^{p(p-3)} z_2} = \frac{X_{3\nu+2}}{z_2^{p(p-4)+1} z_3^p}.$$

Posons, dans ces équations, $z_3=\mu z_2$, puis faisons tendre z_2 vers zéro après multiplication par z_2; il vient

$$\frac{X_1}{\mu} = \frac{X_{3\nu+1}}{1}, \qquad X_2 = X_3 = \cdots = X_{3\nu} = X_{3\nu+2} = 0.$$

Par conséquent, au domaine du point considéré correspond, sur Φ_1 la droite $O_1\, O_{3\nu+1}$.

Effectuons maintenant sur l'équation de C_1' la transformation T_2^λ. En raisonnant comme tantôt, nous serons conduit à poser $\lambda=\frac{1}{2}(p-3)=3\nu-1$ et, après division par $z_3^{6\nu-1}$, nous obtiendrons [1]

$$z_1^{p(3\nu-1)}(\lambda_1 z_2^2 + \lambda_{2\nu+1} z_2 z_3 + \lambda_{3\nu+2} z_3^2) + \cdots = 0,$$

les termes non écrits étant de puissances inférieures à $p(3\nu=1)$ en z_1.

Les équations paramétriques de Φ_1 peuvent s'écrire

$$\frac{X_1}{z_1^{p(3\nu-1)} z_2^2} = \frac{X_{2\nu+1}}{z_1^{p(3\nu-1)} z_2 z_3} = \frac{X_{3\nu+2}}{z_1^{p(3\nu-1)} z_3^2} = \cdots$$

---

(1) En général, pour éviter les formules trop longues, nous n'écrivons que les termes des équations qui présentent de l'intérêt pour notre objet. En général, ce seront les termes de plus haute puissance en z_1.

En posant $z_3 = \mu z_2$, puis en faisant tendre z_2 vers zéro après multiplication par $z^2{}_2$, nous obtiendrons

$$\frac{X_1}{1} = \frac{X_{2\nu-1}}{\mu} = \frac{X_{3\nu+2}}{\mu^2}, \quad X_2 = \cdots = X_\nu = X_{2\nu+2} = \cdots = X_{3\nu+1} = 0.$$

Par conséquent, les courbes C_1' ont en commun une suite de 3ν—1 points doubles infiniment voisins successifs de A, le premier de ces points étant sur la droite $x_2 = 0$. Tous ces points sont unis pour l'involution I_p' et le dernier est uni parfait. Au domaine de ce dernier point correspond sur la surface Φ_1 la conique γ_2 d'équations

$$X^2_{2\nu+1} = X_1 X_{3\nu+2}, \quad X_2 = \cdots = X_{2\nu} = X_{2\nu+2} = \cdots = X_{3\nu+1} = 0,$$

s'appuyant au point O_1 sur la droite $O_1\, O_{3\nu+1}$.

Le point de diramation O_0 de la surface Φ, qui correspond au point uni A, est triple pour cette surface. Le cône tangent se décompose en un plan et un cône du second ordre ayant la droite $O_0\, O_1$ en commun.

D'ailleurs, parmi les p^2 points d'intersection de deux courbes C_1', il y en a

$$9 + p - 3 + 4(3\nu - 1) = 3p$$

absorbés en A et la surface Φ_1 est bien d'ordre p—3.

9. — Les courbes C_1'', c'est-à-dire les courbes C_1' assujetties à avoir en A une tangente distincte de $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, sont caractérisées par $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$. Ces courbes possèdent en A un point multiple d'ordre six, quatre tangentes étant confondues avec $x_2 = 0$ et les deux autres avec $x_3 = 0$. Aux courbes C_1'' correspondent sur Φ_1 les sections de cette surface par les hyperplans passant par O_1. Ou encore, les courbes C_1'' ont pour homologues, sur la surface Φ_2 projection à partir de O_1 de Φ_1 sur l'hyperplan $X_1 = 0$, les sections hyperplanes.

Examinons la singularité des courbes C_1'' au point A.

Effectuons la transformation $T_1^{3\nu-3}$ et divisons l'équation obtenue par $z_1^{6\nu-2}$; nous obtenons

$$\lambda_2 z_1^{3p(\nu-1)+1} z_3^2 + \lambda_{3\nu+1} z_1^{3p(\nu-1)} z_2^3 + \cdots = 0.$$

Les courbes C_1'' ont donc en commun une suite de $3\nu-3$ points doubles infiniment voisins successifs de A, dont le premier est sur $x_3 = 0$.

Effectuons encore une fois la transformation T_1 sur l'équation précédente et divisons par z_2^2. Nous obtenons

$$\lambda_2 z_1^{p(3\nu-2)-1} z_3^2 + \lambda_{3\nu+1} z_1^{p(3\nu-2)} z_2 + \cdots = 0.$$

Aux points doubles considérés fait donc suite un point simple.

Effectuons enfin sur l'équation précédente la transformation T_2 et divisons par z_3; il vient

$$z_1^{2p(3\nu-2)} (\lambda_2 z_3 + \lambda_{3\nu+1} z_2) + \cdots = 0.$$

On trouve donc un point simple, uni parfait pour l'involution I_p', faisant suite au précédent. Au domaine de ce point simple correspond, sur la surface Φ_2, la droite $O_2 O_{3\nu+1}$.

Effectuons maintenant, sur l'équation des courbes C_1'', l'opération $T_2^{\nu-2}$; il vient, après division par $z_3^{4\nu-6}$,

$$\lambda_2 z_1^{p(\nu-1)-4\nu+2} z_2^4 + \lambda_{2\nu+1} z_1^{p(\nu-1)-4\nu} z_2 z_3^5 + \lambda_{3\nu+2} z_1^{p(\nu-2)} z_3^{2\nu+7} + \cdots = 0.$$

Au point A font donc suite $\nu-2$ points quadruples infiniment voisins successifs, dont le premier est situé sur la droite $x_2 = 0$.

Effectuons encore une fois, sur l'équation précédente, la transformation T_2 et divisons par z_3^4; nous obtenons

$$\lambda_2 z_1^{\nu(p-4)-2} z_2^4 + \lambda_{2\nu+1} z_1^{\nu(p-4)-1} z_2 z_3^2 + \lambda_{3\nu+2} z_1^{p(\nu-1)} z_3^{2\nu+3} + \cdots = 0. \quad (1)$$

Au dernier point quadruple rencontré est donc infiniment voisin un point triple en lequel deux tangentes sont confondues avec $z_3 = 0$, la dernière étant $z_2 = 0$.

Effectuons, sur l'équation (1), la transformation T_1. Nous obtenons, après division par z_2^3, l'équation

$$\lambda_2 z_1^{2\nu(p-4)} z_2 + \lambda_{2\nu+1} z_1^{2\nu(p-4)-1} z_3^2 + \lambda_{3\nu+2} z_1^{2p} z_2^{2\nu} z_3^{2\nu+3} + \cdots = 0.$$

Au point triple de la courbe (1) est donc infiniment voisin, dans la direction $z_3 = 0$, un point simple. Effectuons, sur la courbe précédente, la transformation T_2 et divisons par z_3; il vient

$$z_1^{4\nu(p-4)} (\lambda_2 z_2 + \lambda_{2\nu+1} z_3) + \cdots = 0.$$

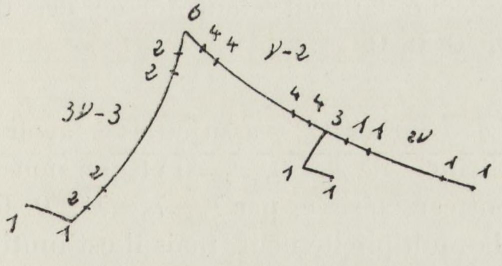
On obtient donc un dernier point simple, uni parfait pour I_p'. Au domaine de ce point correspond, sur la surface Φ_2, la droite $O_2\, O_{2\nu+1}$.

Reprenons la courbe (1) et effectuons la transformation $T_2^{2\nu}$. Après division par $z_3^{2\nu+2}$, nous obtenons l'équation

$$z_1^{\nu(2\nu+1)(p-4)+2\nu-1} (\lambda_{2\nu+1} z_2 + \lambda_{3\nu+2} z_3) + \cdots = 0.$$

Au point triple de la courbe (1) fait donc suite, dans la direction $z_2 = 0$, une série de 2ν points simples dont le dernier est uni parfait pour I_p. Au domaine de ce point correspond, sur la surface Φ_2, la droite $O_{\nu+1}\, O_{3\nu+2}$.

Les courbes C_1'' ont donc en commun un point A multiple d'ordre six auquel sont infiniment voisins successifs :



dans une direction, une série de $3\nu-1$ points dont les $3\nu-3$ premiers sont doubles et les deux derniers simples; dans une autre direction, une série de $\nu-1$ points dont les $\nu-2$ premiers sont quadruples et le dernier triple; à celui-ci font suite, dans une direction, deux points simples infiniment voisins successifs; dans une autre direction, 2ν points simples infiniment voisins sucessifs. Cette singularité peut être représentée par le schéma ci-avant.

Il en résulte que le point A absorbe

$$36 + 4(3\nu - 3) + 2 + 16(\nu - 2) + 9 + 2 + 2\nu = 5p$$

points d'intersection des courbes C_1''. Par conséquent, la surface Φ_2 est d'ordre p—5 et le point O_1 est double pour la surface Φ_1.

Il semble qu'il y ait ici une contradiction : on pourrait en effet croire que le point O_1 est triple pour la surface Φ_1, le cône tangent en ce point étant formé des plans $O_1\,O_2\,O_{3\nu+1}$, $O_1\,O_2\,O_{2\nu+1}$, $O_1\,O_{2\nu+1}\,O_{3\nu+2}$. Il n'en est rien. Observons en effet que par O_1, sur Φ_1, passe une conique γ_2 située dans le plan $O_1\,O_{2\nu+1}\,O_{3\nu+2}$; la droite $O_{2\nu+1}\,O_{3\nu+2}$ rencontrée sur la surface Φ_2 n'est autre que la projection de cette conique à partir de O_1. C'est ce que confirme d'ailleurs l'étude de la singularité des courbes C_1'' au point A, le dernier point de la suite des 2ν points simples rencontrés étant celui qui, sur les courbes C_1', correspond à la conique γ_2. Le point O_1 est double biplanaire pour la surface Φ_1, le cône tangent étant formé des deux plans $O_1\,O_2\,O_{3\nu+1}$, $O_1\,O_2\,O_{2\nu+1}$.

10. — Les courbes C_1'', assujetties à avoir en A une tangente distincte de $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ et que nous désignons par C_1''' sont caractérisées par $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Elles possèdent en A la multiplicité neuf, mais il est inutile d'approfondir l'étude de leur singularité en ce point.

Les courbes $C_1^{(k)}$ sont caractérisées par $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_{k-1} = 0$ pour $k \leqslant \nu + 1$, par $\lambda_0 = \ldots = \lambda_\nu = \lambda_{2\nu+1} = 0$ pour $k = \nu + 2$, par les mêmes conditions et $\lambda_{\nu+1} = 0$ pour

$k=\nu+3$, et ainsi de suite. D'une manière précise, le système $|C_1^{(\nu+2i)}|$ est caractérisé par

$$\lambda_0=\lambda_1=\cdots=\lambda_{\nu+i-1}=0, \quad \lambda_{2\nu+1}=\cdots=\lambda_{2\nu+i}=0$$

et le système $|C_1^{(\nu+2i+1)}|$ par

$$\lambda_0=\lambda_1=\cdots=\lambda_{\nu+i}=0, \quad \lambda_{2\nu+1}=\cdots=\lambda_{2\nu+i}=0.$$

Nous aurons à déterminer la singularité de O_2 pour la surface Φ_2, de O_3 pour la surface Φ_3, ..., de O_ν pour la surface Φ_ν, de $O_{2\nu+1}$ pour la surface $\Phi_{\nu+1}$, ..., de $O_{\nu+i}$ pour la surface $\Phi_{\nu+2i}$, de $O_{2\nu+i+1}$ pour la surface $\Phi_{\nu+2i+1}$, ..., de $O_{2\nu-1}$, pour $\Phi_{3\nu-2}$, de $O_{3\nu}$ pour $\Phi_{3\nu-1}$.

La surface $\Phi_{3\nu-2}$ a pour équations paramétriques

$$\frac{X_{2\nu-1}}{x_1^4x_2^{4\nu-2}x_3^{2\nu-1}}=\frac{X_{2\nu}}{x_1x_2^{4\nu}x_3^{2\nu}}=\frac{X_{3\nu}}{x_1^2x_2^{2\nu-1}x_3^{4\nu}}=\frac{X_{3\nu+1}}{x_2^p}=\frac{X_{3\nu+2}}{x_3^p},$$
$$X_0=\cdots=X_{2\nu-2}=X_{2\nu+1}=\cdots=X_{3\nu-1}=0. \qquad (1)$$

Ses équations sont donc les équations (1) jointes à

$$X_{3\nu}^2-X_{2\nu-1}X_{3\nu+2}=0, \quad X_{2\nu}^2-X_{3\nu}X_{3\nu+1}=0.$$

La surface est donc du quatrième ordre. Le point $O_{2\nu-1}$ est double conique pour cette surface et par conséquent les points O_2, O_3, ..., $O_{3\nu-1}$ sont doubles respectivement pour les surfaces Φ_2, Φ_3, ..., $\Phi_{3\nu-3}$.

Quant à la surface $\Phi_{3\nu-1}$, elle a pour équation

$$X_{2\nu}^2-X_{3\nu}X_{3\nu+1}=0,$$
$$X_0=\cdots=X_{2\nu-1}=0, \quad X_{2\nu+1}=\cdots=X_{3\nu-1}=0.$$

C'est un cône du second ordre pour lequel le point $O_{3\nu}$ est simple.

Remarquons encore que les courbes $C_1^{(3\nu)}$ forment un réseau et ont un point multiple d'ordre $p-1$ en A; la surface $\Phi_{3\nu}$ est un plan. Les courbes $C_1^{(3\nu+1)}$ se réduisent à des groupes de p droites variables passant par A.

On pourrait croire d'après ce qui précède que la surface Φ possède en O_0 un point triple (dont le cône tangent se compose d'un plan et d'un cône du second ordre) auquel sont infiniment voisins successifs 3ν—2 points doubles dont le dernier est conique. Il n'en est rien cependant, comme on va le voir.

11. — Recherchons la singularité du point O_ν pour la surface Φ_ν. A cet effet, considérons les courbes $C_1^{(\nu+1)}$, qui ont pour équation

$$\lambda_{\nu+1} x_1^{3\nu-2} x_2^{2\nu+2} x_3^{\nu+1} + \cdots + \lambda_{2\nu} x_1 x_2^{4\nu} x_3^{2\nu} + \lambda_{2\nu+1} x_1^{3\nu-1} x_2 x_3^{3\nu+1} + \cdots$$
$$+ \lambda_{3\nu} x_1^2 x_2^{2\nu-1} x_3^{4\nu} + \lambda_{3\nu+1} x_2^p + \lambda_{3\nu+2} x_3^p = 0.$$

Elles ont un point multiple d'ordre $3\nu+2$ en A, $3\nu+1$ tangentes coïncidant avec $x_3=0$ et la dernière avec $x_2=0$.

Opérons sur la courbe précédente la transformation $T_2^{3\nu-1}$. Après division des deux membres de l'équation obtenue par $z_3^{6\nu}$, nous trouvons

$$z_1^{p(3\nu-1)}(\lambda_{2\nu+1} z_2 + \lambda_{3\nu+2} z_3) + \cdots = 0.$$

Les courbes $C_1^{(\nu+1)}$ ont donc en commun 3ν—1 points simples infiniment voisins successifs de A, le premier se trouvant sur $x_2=0$. Ces points appartiennent également aux courbes C_1' et au domaine du dernier de ces points correspond, sur la surface $\Phi_{\nu+1}$, la droite $O_{2\nu+1}\, O_{3\nu+2}$, projection de la conique γ_2. Il en résulte que le plan $O_\nu\, O_{2\nu+1}\, O_{3\nu+2}$ n'est pas tangent à la surface Φ_ν au point O.

Nous allons maintenant supposer, dans ce qui suit, ν suffisamment élevé pour que les opérations effectuées soient possibles.

Opérons trois fois de suite sur les courbes $C_1^{(\nu+1)}$ l'opération T_1. Nous trouvons successivement

$$\lambda_{\nu+1} z_1^{8\nu-2} z_2 z_3^{\nu+1} + \lambda_{2\nu+1} z_1^{6\nu-1} z_3^{3\nu+1} + \lambda_{3\nu+1} z_1^p z_2^{3\nu-1} + \cdots = 0, \quad (1)$$

$$\lambda_{\nu+1} z_1^{16\nu-3} z_3^{\nu+1} + \lambda_{2\nu+1} z_1^{12\nu-2} z_2^{2\nu-1} z_3^{3\nu+1} + \lambda_{3\nu+1} z_1^{15\nu+1} z_2^{2\nu-3} + \cdots = 0, \quad (2)$$

$$\lambda_{\nu+1} z_1^{32\nu-6} z_3^{\nu+1} + \lambda_{2\nu+1} z_1^{26\nu-5} z_2^{4\nu-1} z_3^{3\nu+1} + \lambda_{3\nu+1} z_1^{32\nu-1} z_2^{\nu-4} + \cdots = 0. \quad (3)$$

La courbe (1) possède en (1, 0, 0) un point multiple d'ordre $\nu+2$ dont $\nu+1$ tangentes sont confondues avec $z_3=0$ et une avec $z_2=0$.

La courbe (2) possède en (1, 0, 0) un point multiple d'ordre $\nu+1$ à tangentes toutes confondues avec $z_3=0$.

La courbe (3) possède en (1, 0, 0) un point multiple d'ordre $\nu-4$ à tangentes toutes confondues avec $z_2=0$.

Opérons sur la courbe (3) l'opération T_2. Nous obtenons

$$\lambda_{\nu+1} z_1^{65\nu-11} z_3^5 + \lambda_{2\nu+1} z_1^{55\nu-9} z_2^{4\nu-1} z_3^{6\nu+4} + \lambda_{3\nu+1} z_1^{64\nu-2} z_2^{\nu-4} + \cdots = 0.$$

Nous obtenons donc une courbe ayant en (1, 0, 0) un point quintuple à tangentes toutes confondues avec $z_3=0$. Sur cette courbe, nous devrons opérer la transformation T_1, et ainsi de suite. Sans faire ces opérations, il est évident que l'on parviendra finalement à un dernier point simple, uni parfait pour l'involution I_p', auquel correspondra, sur la surface $\Phi_{\nu+1}$, la droite $O_{\nu+1} O_{3\nu+1}$.

Reprenons maintenant la courbe (1) et opérons, sur cette courbe, la transformation $T_2^{2\nu-1}$. Nous obtenons

$$z_1^{p(3\nu-1)} (\lambda_{\nu+1} z_2 + \lambda_{2\nu+1} z_3) + \cdots = 0.$$

Au point multiple d'ordre $\nu+2$ de la courbe (1) sont donc infiniment voisins successifs $2\nu-1$ points simples dont le dernier est uni parfait pour l'involution I_p'. Au domaine de ce point correspond, sur $\Phi_{\nu+1}$, la droite $O_{\nu+1}$ $O_{2\nu+1}$.

Nous voyons donc que le point O_ν est double biplanaire pour la surface Φ , le cône tangent étant formé des plans $O_\nu\ O_{\nu+1}\ O_{2\nu+1}$, $O_\nu\ O_{\nu+1} O_{3\nu+1}$.

Observons maintenant que l'on passe de la surface $\Phi_{\nu+1}$ à la surface $\Phi_{\nu+2}$ en projetant la première du point $O_{2\nu+}$ sur l'hyperplan $X_{2\nu+1}=0$. Le point $O_{2\nu+1}$ est donc double pour la surface $\Phi_{\nu+1}$. Si la surface Φ_ν possède un point double biplanaire auquel est infiniment voisin un point double, celui-ci se projette sur $\Phi_{\nu+1}$ en $O_{\nu+1}$ et non en

$O_{2\nu+1}$. Nous pouvons donc simplement conclure de tout ceci que la surface Φ possède en O_0 un point triple (à cône tangent réductible en deux parties) auquel sont infiniment voisins successifs des points doubles.

Il serait d'ailleurs possible de déterminer le nombre de ces points doubles par une analyse des singularités au point A des courbes C_1''', $C_1^{(4)}$, ...; nous résoudrons cette question plus loin par une autre méthode moins longue.

Il faut remarquer également que le dernier point double de la suite est conique ou biplanaire ordinaire. On peut voir aisément que le premier cas se présente pour $\nu=1$, $p=7$; le second se présente pour $\nu=2$, $p=13$. Cette question sera également résolue plus loin dans le cas général.

12. — Parmi les systèmes $|C_2|$, $|C_3|$, ..., $|C_p|$, il en est deux dont les courbes ont un point simple en A. Le premier de ces systèmes, que nous désignerons par $|C_2|$, a pour équation

$$\begin{aligned}&\lambda_0 x_1^{p-1} x_2 + \cdots + \lambda_i x_1^{p-3i-1} x_2^{2i+1} x_3^i + \cdots + \lambda_{2\nu} x_2^{4\nu+1} x_3^{2\nu} \\ &+ \lambda_{2\nu+1} x_1^{3\nu+1} x_3^{3\nu} + \cdots + \lambda_{2\nu+1+j} x_1^{3\nu-3j+1} x_2^{2j} x_3^{2\nu+j} + \cdots + \lambda_{3\nu+1} x_1 x_2^{2\nu} x_3^{4\nu} = 0.\end{aligned}$$

Le second, que nous désignerons par $|C_3|$, est représenté par

$$\begin{aligned}&\lambda_0 x_1^{p-1} x_3 + \cdots + \lambda_i x_1^{p-3i-1} x_2^{2i} x_3^{i+1} + \cdots + \lambda_{2\nu} x_2^{4\nu} x_3^{2\nu+1} \\ &+ \lambda_{2\nu+1} x_1^{3\nu-2} x_2 x_3^{3\nu+2} + \cdots + \lambda_{2\nu+j} x_1^{3\nu-3j+1} x_2^{2j-1} x_3^{3\nu+j+1} + \cdots \\ &+ \lambda_{3\nu} x_1 x_2^{2\nu-1} x_3^{4\nu+1} + \lambda_{3\nu+1} x_1^2 x_2^{p-2} = 0.\end{aligned}$$

Appliquons aux courbes C_2 la transformation $T_2^{3\nu-1}$; après division par $z_3^{3\nu-1}$, on a

$$z_1^{3\nu(p-1)} (\lambda_0 z_2 + \lambda_{2\nu+1} z_3) + \cdots = 0.$$

Les courbes C_2 ont donc en commun le point A et une suite de $3\nu-1$ points simples infiniment voisins successifs. Ces points appartiennent également aux courbes C_1', pour lequels ils sont doubles. Le point A absorbe donc p des intersections d'une courbe C_2 et d'une courbe C_1'.

De même, appliquons aux courbes C_3 la transformation T_1^{p-3} et divisons par z_2^{p-1}; nous obtenons

$$z_1^{(p-1)(p-2)}(\lambda_0 z_3 + \lambda_{3\nu+1} z_2) + \cdots = 0.$$

Les courbes C_3 ont donc en commun A et une suite de $p-3$ points simples infiniment voisins successifs. Ces points appartiennent aussi aux courbes C_1' et dans l'intersection d'une courbe C_1' et d'une courbe C_3, le point A compte pour p points.

Désignons par $|C_p|$ le système linéaire d'équation

$$\begin{gathered}\lambda_0 x_1^{p-2} x_2 x_3 + \cdots + \lambda_i x_1^{p-3i-2} x_2^{2i+1} x_3^{i+1} + \cdots + \lambda_{2\nu-1} x_1^2 x_2^{4\nu-1} x_3^{2\nu} \\ + \lambda_{2\nu} x_1^{3\nu} x_3^{3\nu+1} + \cdots + \lambda_{2\nu+j} x_1^{3\nu-3j} x_2^{2j} x_3^{3\nu+j+1} + \cdots + \lambda_{3\nu} x_2^{2\nu} x_3^{4\nu+1} \\ + \lambda_{3\nu+1} x_1 x_2^{p-1} = 0.\end{gathered}$$

Appliquons aux courbes C_p la transformation T_1^{p-3} et divisons le résultat par z_2^{p-2}; nous avons

$$z_1^{p^2-3p+1}(\lambda_0 z_3 + \lambda_{3\nu+1} z_2) + \cdots = 0\,;$$

de sorte que les courbes C_p ont en commun $p-3$ points simples infiniment voisins successifs de A, le premier de ces points étant sur $x_3 = 0$. Ces $p-3$ points appartiennent tous aux courbes C_1'.

Appliquons maintenant aux courbes C_p la transformation $T_2^{3\nu-1}$. Après division des deux membres de l'équation obtenue par $z_3^{3\nu}$, il vient

$$z_1^{18\nu^2-1}(\lambda_0 z_2 + \lambda_{2\nu} z_3) + \cdots = 0.$$

Les courbes C_p ont en commun $3\nu-1$ points simples infiniment voisins successifs de A, le premier étant sur $x_2 = 0$. Ces points appartiennent aux courbes C_1'.

On conclut de l'analyse précédente que les courbes $C_2 + C_p$ se comportent au point A comme les courbes C_1'.

Envisageons encore les courbes d'équation

$$\lambda_0 x_1^{p-2} x_2^2 + \cdots + \lambda_i x_1^{p-3i-2} x_2^{2(i+1)} x_3^i + \cdots + \lambda_{2\nu-1} x_1^2 x_2^{4\nu} x_3^{2\nu-1}$$
$$+ \lambda_{2\nu} x_1^{3\nu} x_2 x_3^{3\nu} + \cdots + \lambda_{2\nu+j} x_1^{3\nu-3j} x_2^{2j+1} x_3^{3\nu+j} + \cdots + \lambda_{3\nu} x_2^{2\nu+1} x_3^{4\nu}$$
$$+ \lambda_{3\nu+1} x_1 x_3^{p-1} = 0,$$

que nous désignerons par C_{p-1}.

Appliquons à ces courbes la transformation $T_2^{3\nu-1}$; après avoir supprimé le facteur z_3^{p-3}, il vient

$$z_1^{3\nu(p-2)} (\lambda_0 z_2^2 + \lambda_{2\nu} z_2 z_3 + \lambda_{3\nu+1} z_3^2) + \cdots = 0.$$

Les courbes C_{p-1} possèdent donc un point double en A auquel font suite 3ν—1 points doubles infiniment voisins successifs. Ces 3ν—1 points appartiennent aux courbes C_1'.

Cela étant, les courbes $C_3 + C_{p-1}$ ont le même comportement en A que les courbes C_1'.

On rapprochera le résultat que nous venons d'obtenir pour les courbes $C_2 + C_p$, $C_3 + C_{p-1}$ de l'observation faite plus haut (n° 4).

13. — Nous passerons maintenant à l'examen du cas $p = 6\nu + 5$.

L'équation du système $|C_1|$ est actuellement

$$\lambda_0 x_1^p + \lambda_1 x_1^{p-3} x_2^2 x_3 + \cdots + \lambda_i x_1^{p-3i} x_2^{2i} x_3^i + \cdots + \lambda_{2\nu+1} x_1^2 x_2^{4\nu+2} x_3^{2\nu+1}$$
$$+ \lambda_{2\nu+2} x_1^{3\nu+1} x_2 x_3^{3\nu+3} + \cdots + \lambda_{2\nu+1+j} x_1^{3\nu-3j+4} x_2^{2j-1} x_3^{3\nu+j+2} + \cdots$$
$$+ \lambda_{3\nu+2} x_1 x_2^{2\nu+1} x_3^{4\nu+3} + \lambda_{3\nu+3} x_2^p + \lambda_{3\nu+4} x = 0.$$

Ce système $|C_1|$ est de dimension $3\nu + 4$. Rapportons projectivement ses courbes aux hyperplans d'un espace linéaire $S_{3\nu+4}$ à $3\nu + 4$ dimensions, en posant

$$\rho X_i = x_1^{p-3i} x_2^{2i} x_3^i, \qquad (i = 0, 1, \ldots, 2\nu + 1),$$
$$\rho X_{2\nu+2+j} = x_3^{3\nu-3j+4} x_2^{2j-1} x_3^{3\nu+j+2}, \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu + 1),$$
$$\rho X_{3\nu+3} = x_2^p, \qquad \rho X_{3\nu+4} = x_3^p.$$

Aux groupes de l'involution I_p' correspondent les points d'une surface Φ dont les équations précédentes sont précisément les équations paramétriques. La surface Φ est d'ordre p et au point uni A $(1, 0, 0)$ de l'involution I_p correspond le point de diramation O_0 de la surface Φ. Il s'agit d'étudier la singularité de cette surface en ce point.

Considérons les courbes C_1', c'est-à-dire les courbes C_1 passant par A. Elles sont caractérisées par $\lambda_0 = 0$ et ont un point triple en A, deux tangentes coïncidant avec $x_2 = 0$ et une avec $x_3 = 0$.

Appliquons aux courbes C_1' la transformation T_1^{p-3}. Après suppression du facteur z^{p-1}, nous obtenons l'équation

$$z_1^{p(p-3)}(\lambda_1 z_3 + \lambda_{3\nu+3} z_\nu) + \cdots = 0.$$

Par conséquent les courbes C_1' ont en commun une suite de p—3 points simples, infiniment voisins successifs de A, unis par l'involution I_p' et dont le dernier est uni parfait pour cette involution. Aux points du domaine de ce dernier point correspondent, sur la surface Φ_1 projection de Φ à partir de O_0 sur l'hyperplan $X_0 = 0$, les points de la droite $O_1\, O_{3\nu+3}$.

Appliquons maintenant aux courbes C_1' la transformation $T_2^{3\nu+1}$. Après division des deux membres de l'équation obtenue par $z_3^{6\nu+3}$, nous obtenons

$$z_1^{p(3\nu+1)}(\lambda_1 z_2^2 + \lambda_{2\nu+2} z_2 z_3 + \lambda_{3\nu+4} z_3^2) + \cdots = 0.$$

Les courbes C_1' ont donc en commun une suite de $3\nu + 1$ points doubles infiniment voisins successifs de A, unis pour I_p'. Le premier de ces points est situé sur la droite $x_2 = 0$; le dernier est uni parfait pour I_p' et au domaine de ce point correspond pour la surface Φ_1, la conique

$$X_{2\nu+2}^2 - X_1 X_{3\nu+4} = 0$$

du plan $O_1\, O_{2\nu+2}\, O_{3\nu+4}$.

La surface Φ possède donc un point triple O_0, le cône tangent se composant du plan $O_0\, O_1\, O_{3\nu+3}$ et d'un cône du second ordre ayant une droite O_0O_1 en commun avec le plan.

14. — Les courbes C_1'', c'est-à-dire les courbes C_1' assujetties à avoir en A une tangente distincte de $x_2=0$, $x_3=0$, sont caractérisées par $\lambda_0=0$, $\lambda_1=0$. Le terme de degré le plus élevé en x_1 est

$$\lambda_2 x_1^{p-6} x_2^4 x_3^2.$$

Elles ont donc un point sextuple en A.

Appliquons aux courbes C_1'' la transformation $T_1^{3\nu-1}$; il vient, après suppression du facteur z_2^{p-3},

$$\lambda_2 z_1^{p(3\nu-1)+1} z_3^2 + \lambda_{3\nu+3} z_1^{p(3\nu-1)} z_2^3 + \cdots = 0.$$

Les courbes C_1'' ont donc en commun une suite de 3ν—1 points doubles infiniment voisins successifs de A. Appliquons encore une fois à la courbe précédente la transformation T_1 et divisons les deux membres du résultat par z_2^2. On a

$$\lambda_2 z_1^{3p\nu-1} z_3^2 + \lambda_{3\nu+3} z_1^{3p\nu} z_2 + \cdots = 0.$$

On trouve donc un point simple faisant suite aux points précédents.

Appliquons enfin la transformation T_2 et supprimons le facteur z_3; on a

$$z_1^{6p\nu}(\lambda_2 z_3 + \lambda_{3\nu+3} z_2) + \cdots = 0.$$

On trouve donc un dernier point simple, uni parfait pour I_p'. Au domaine de ce point correspond, sur la surface Φ_2 projection de Φ_1 à partir de O_1 sur l'hyperplan $X_1=0$, la droite $O_2\,O_{3\nu+3}$.

Revenons aux courbes C_1'' et appliquons à ces courbes la transformation $T_2^{\nu-1}$; divisons les deux membres de l'équation obtenue par $z_3^{4\nu-2}$; nous trouvons

$$\lambda_2 z_1^{(p-4)\nu-2} z_2^4 + \lambda_{2\nu+2} z_1^{(p-1)\nu-3} z_2 z_3^4 + \lambda_{3\nu+4} z_1^{p(\nu-1)} z_3^{2\nu+7} + \cdots = 0,$$

courbe ayant un point quadruple en (1, 0, 0). Les courbes C_1'' ont donc en commun $\nu - 1$ points quadruples infiniment voisins successifs de A.

Opérons encore une fois T_2 sur l'équation précédente et supprimons le facteur z_3^4. Nous obtenons l'équation

$$\lambda_2 z_1^{2\nu(p-4)-4} z_2^4 + \lambda_{2\nu+2} z_1^{2\nu(p-4)-2} z_2 z_3 + \lambda_{3\nu+4} z_1^{2\nu(p-5)-3} z_3^{2\nu+3} + \cdots = 0,$$

représentant une courbe ayant, au point (1, 0, 0), un point double à tangentes distinctes mais fixes.

Opérons sur cette courbe la transformation T_1^2. Après suppression du facteur z_2^3, nous obtenons

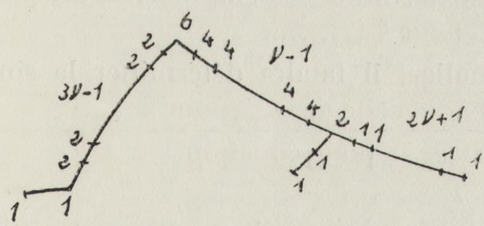
$$z_1^{8\nu(p-4)-6} (\lambda_2 z_2 + \lambda_{2\nu+2} z_3) + \cdots = 0.$$

On trouve donc que les courbes C_1'' ont deux points simples infiniment voisins successifs du dernier point double. Le dernier de ces deux points est uni parfait pour l'involution I_p' et à son domaine correspond, sur Φ_2, la droite $O_2 O_{2\nu+2}$.

Reprenons l'avant-dernière courbe et opérons la transformation $T_2^{2\nu+1}$. En supprimant le facteur $z_3^{2\nu+2}$, nous avons

$$z_1^{2p(\nu+1)(2\nu-1)-4\nu(\nu-1)+7} (\lambda_{2\nu+2} z_2 + \lambda_{3\nu+4} z_3) + \cdots = 0.$$

On trouve donc $2\nu + 1$ points simples infiniment voisins successifs dont le dernier est uni parfait pour I_p' et au



domaine duquel correspond, sur la surface Φ_2, la droite $O_{2\nu+2} O_{3\nu+4}$. Cette droite est la projection, à partir de O_1, de la conique trouvée plus haut sur la surface Φ_1.

En résumé, les courbes C_1'' ont en commun le point sextuple A auquel sont infiniment voisins successifs : dans une première direction, $3\nu-1$ points doubles suivis de deux points simples; dans une seconde direction, $\nu-1$ points quadruples suivis d'un point double; à celui-ci sont infiniment voisins successifs dans une direction deux points simples, dans une autre direction $2\nu+1$ points simples. Cette singularité peut être représentée par le schéma ci-avant.

Deux courbes C_1'' ont en commun, au point A, $5p$ points d'intersection.

En O_1, la surface Φ_1 possède un point double biplanaire, les plans tangents étant $O_1 O_2 O_{2\nu+2}$, $O_1 O_2 O_{3\nu+3}$.

15. — Les systèmes de courbes $|C_1'''|$, $|C_1^{(4)}|$, ... sont obtenus de la manière suivante : Le système $|C_1'''|$ est caractérisé par $\lambda_0=\lambda_1=\lambda_2=0$, ...; le système $|C_1^{(\nu+2)}|$ par $\lambda_0=\lambda_1=\ldots=\lambda_{\nu+1}=0$; le système $|C_1^{(\nu+3)}|$ par $\lambda_0=\lambda_1=\ldots=\lambda_{\nu+1}=\lambda_{2\nu+2}=0$, ...; le système $|C_1^{(\nu+2i)}|$ par $\lambda_0=\ldots\lambda_{\nu+i}=0$, $\lambda_{2\nu+2}=\ldots=\lambda_{2\nu+i}=0$; le système $|C^{(\nu+2i+1)}|$ par $\lambda_0=\ldots=\lambda_{\nu+i}=0$, $\lambda_{2\nu+2}=\ldots=\lambda_{2\nu+i+1}=0$.

En rapportant projectivement les courbes de chacun de ces systèmes aux hyperplans d'espaces linéaires convenablement choisis, on obtiendra les surface Φ_3, Φ_4 ... .

Il faudra déterminer les singularités du point O_2 pour Φ_2, ..., $O_{2\nu+2}$ pour $\Phi_{\nu+2}$, ...

En particulier, il faudra déterminer la singularité de $O_{3\nu+1}$ pour $\Phi_{3\nu}$ et celle de $O_{2\nu+1}$ pour $\Phi_{3\nu+1}$.

La surface $\Phi_{3\nu}$ a pour équations

$$X_{2\nu+1}^2 = X_{3\nu+1} X_{3\nu+3}, \qquad X_{3\nu+2}^2 = X_{2\nu+1} X_{3\nu+4},$$
$$X_0 = X_1 = \cdots = X_{2\nu} = 0, \qquad X_{2\nu+2} = \cdots = X_{3\nu} = 0.$$

Cette surface est du quatrième ordre et $O_{3\nu+1}$ en est un point double conique.

La surface $\Phi_{3\nu+1}$ a pour équations

$$X_{3\nu+2}^2 = X_{2\nu+1} X_{3\nu+4},$$
$$X_0 = \cdots = X_{2\nu} = 0, \qquad X_{2\nu+2} = \cdots = X_{3\nu+1} = 0.$$

C'est un cône du second ordre pour lequel le point $O_{2\nu+1}$ est simple.

On en conclut que l'on passe d'une surface de la suite $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{3\nu+1}$ à la suivante par projection d'un point double. Mais on ne peut en conclure qu'au point triple O_0 de la surface Φ sont infiniment voisins successifs $3\nu+1$ points doubles. Comme dans le cas $p=6\nu+1$, on peut démontrer qu'il n'en est rien et que la surface Φ possède un point triple suivi d'un certain nombre de points doubles biplanaires infiniment voisins successifs suivis d'un point double conique ou biplanaire ordinaire.

16. — Comme dans le premier cas, il existe actuellement deux systèmes linéaires, composés au moyen de l'involution I_p', formés de courbes d'ordre p ayant un point simple en A et rencontrant les courbes C_1' en p points confondus en A.

Le premier, $|C_2|$, de ces systèmes a pour équation

$$\begin{aligned} \lambda_0 x_1^{p-1} x_2 + \cdots + \lambda_i x_1^{p-3i-1} x_2^{2i+1} x_3^i + \cdots + \lambda_{2\nu+1} x_1 x_2^{4\nu+3} x_3^{2\nu+1} \\ + \lambda_{2\nu+2} x_1^{3\nu+3} x_3^{3\nu+2} + \cdots + \lambda_{2\nu+2+j} x_1^{3(\nu-j+1)} x_2^{2j} x_3^{3\nu+j+2} + \cdots \\ + \lambda_{3\nu+3} x_2^{2\nu+2} x_3^{4\nu+3} = 0. \end{aligned}$$

En appliquant à ces courbes la transformation $T_2^{3\nu+1}$ et en supprimant le facteur $z_3^{3\nu+1}$, on trouve

$$z_1^{(p-1)(3\nu+2)} (\lambda_0 x_2 + \lambda_{2\nu+2} x_3) + \cdots = 0.$$

On voit donc que les courbes C_2 ont en commun avec les courbes C_1' une suite de $3\nu+1$ points infiniment voisins successifs de A.

Le second, $|C_3|$, des systèmes en question a pour équation

$$\lambda_0 x_1^{p-1} x_2 + \cdots + \lambda_i x_1^{p-3i-1} x_2^{2i} x_3^{i+1} + \cdots + \lambda_{2\nu+1} x_1 x_2^{4\nu+2} x_3^{2\nu+2}$$
$$+ \lambda_{2\nu+2} x_1^{3\nu} x_2 x_3^{3\nu+4} + \cdots + \lambda_{2\nu+1+j} x_1^{3(\nu-j+1)} x_2^{2j-1} x_3^{3\nu+j+3} + \cdots$$
$$+ \lambda_{3\nu+2} x_2^{2\nu+1} x_3^{4\nu+4} + \lambda_{3\nu+3} x_1^2 x_2^{p-2} = 0.$$

Appliquons aux courbes C_3 la transformation T_1^{p-3}; il vient, après suppression du facteur z_3^{p-3},

$$z_1^{(p-1)(p-2)} (\lambda_0 z_3 + \lambda_{3\nu+3} z_2) + \cdots = 0.$$

Les courbes C_3 ont donc $p-3$ points infiniment voisins successifs de A en commun avec les courbes C_1'.

Il est aisé de former les équations des systèmes qui, joints à $|C_2|$ ou à $|C_3|$, donnent des systèmes dont les courbes se comportent en A comme les courbes C_1'; nous ne nous y arrêterons pas.

17. — Les cas $p=6\nu+1$, $p=6\nu+5$ conduisent à des résultats analogues.

Dans le cas $p=6\nu+1$, les courbes C_1' ont en A un point triple auquel sont infiniment voisins successifs dans une direction, $p-3$ points simples, dans une seconde direction, $3\nu+1=\frac{1}{2}(p-3)$ points doubles.

Dans le cas $p=6\nu+5$, les courbes C_1' ont en A un point triple auquel sont infiniment voisins successifs dans une direction, $p-3$ points simples et dans une autre direction, $3\nu+1=\frac{1}{2}(p-3)$ points doubles.

Dans les deux cas, les courbes C_1' ont donc le même comportement en A.

Dans le cas $p=6\nu+1$, les courbes C_1'' ont en A un point sextuple auquel sont infiniment voisins successifs, dans une direction, $\frac{1}{2}(p-7)$ points doubles suivis de deux points simples, dans une autre direction, $\frac{1}{6}(p-13)$ points quadruples suivis d'un point triple auquel sont infiniment voisins successifs, d'une part, deux points simples, d'autre part, $\frac{1}{3}(p-1)$ points simples.

Dans le cas $p=6\nu+5$, les courbes C_1'' ont en A un point sextuple auquel sont infiniment voisins successifs, dans une direction $\frac{1}{2}(p-7)$ points doubles suivis de deux points simples; dans une seconde direction, $\frac{1}{6}(p-11)$ points quadruples suivis d'un point double auquel sont infiniment voisins successifs, d'une part, deux points simples, d'autre part, $\frac{1}{3}(p-2)$ points simples.

Les comportements en A des courbes C_1'' ne sont donc plus les mêmes dans les deux cas, mais dans chaque cas, deux courbes C_1'' ont $5p$ points d'intersection absorbés en A.

D'une manière générale, deux courbes $C_1^{(k)}$ ont, dans les deux cas, $(2k+1)p$ points d'intersection absorbés en A, pour $k=1, 2, 3, \ldots, \frac{1}{2}(p-3)$.

Dans les deux cas, la surface Φ possède un point triple dont le cône tangent est formé d'un plan et d'un cône du second ordre. A ce point triple sont infiniment voisins successifs un certain nombre η de points doubles dont le dernier est conique ou biplanaire ordinaire.

18. — Revenons maintenant à la surface F du début. Les courbes C_1', C_1'', ..., C_2, C_3, ..., C_p ont, en A, des comportements analogues aux courbes désignées par les mêmes symboles dans le plan α. Les points unis de l'involution I_p sur la surface F se projettent en effet suivant des points unis de l'involution I_p' du plan α.

Les courbes C_1' ont en A un point triple auquel sont infiniment voisins successifs : dans une direction, $p-3$ points simples dont le dernier est uni parfait pour l'involution I_p; dans une autre direction, $\frac{1}{2}(p-3)$ points doubles dont le dernier est également uni parfait pour I_p. Par conséquent la surface Φ possède au point de diramation A' homologue de A, un point triple dont le cône tangent est formé d'un plan et d'un cône du second ordre, ayant une droite en commun.

Désignons par P_1 le dernier point simple du domaine de

A commun à toutes les courbes C_1', par P_2 le dernier point double du même domaine commun à ces courbes. Au domaine du point P_1 correspond, sur la surface Φ_1, une droite γ_1 et au domaine du point P_2, une conique γ_2. La droite γ_1 et la conique γ_2 forment la projection sur la surface Φ_1, du domaine du point A' sur la surface Φ; par conséquent γ_1 et γ_2 ont un point commun A_1'.

Les courbes C_1'' ont $5p$ points d'intersection réunis en A; donc la surface Φ_2 est d'ordre $n-5$ et par conséquent le point A_1' est nécessairement double pour la surface Φ_1.

Le point double A_1' peut être conique ou biplanaire pour la surface Φ_1. Dans le second cas, il peut avoir un point double dans son domaine du premier ordre. D'une manière générale, nous pouvons supposer qu'au point A_1' triple de Φ sont infiniment voisins successifs η points doubles dont le dernier est conique ou biplanaire ordinaire.

19. — Les hyperplans de S_r passant par les axes $S^{(1)}$, $S^{(3)}$, $S^{(4)}$, ..., $S^{(p)}$ de l'homographie T ne contiennent pas le plan α; ils découpent sur la surface F les courbes C_2 ayant un point simple en A et tangentes en ce point à la droite $a_3 = AA_3$ (s'appuyant sur $S^{(3)}$). Ces courbes C_2 rencontrent les courbes C_1' en p points confondus en A; supposons, pour fixer les idées, qu'elles passent par les $p-3$ points simples infiniment successifs de A communs aux courbes C_1' et par conséquent par le point P_1.

Aux courbes C_2 correspondent, sur la surface Φ, des courbes Γ_2 d'ordre n, passant par A' et tangentes en ce point au plan tangent à la surface Φ. En d'autres termes, sur la surface Φ_1, il correspond aux courbes C_2 des courbes d'ordre $n-1$ rencontrant en un point la droite γ_1.

Les hyperplans de S_r passant par les axes $S^{(1)}$, $S^{(3)}$, $S^{(4)}$, ..., $S^{(p)}$ de l'homographie T ne contiennent pas le plan α et découpent sur la surface F des courbes C_3 passant simplement par A et tangentes en ce point à la droite $a_2 = AA_2$ (s'appuyant sur $S^{(2)}$). Ces courbes rencontrent les courbes

C_1' en p points confondus en A; elles passent par les $\frac{1}{2}(p—3)$ points doubles infiniment voisins successifs de A des courbes C_1' et par suite par le point P_2.

Aux courbes C_3 correspondent, sur la surface Φ, des courbes Γ_3 d'ordre n passant simplement par A′ en y touchant le cône du second ordre tangent à la surface en ce point. Ou encore, aux courbes C_3 correspondent, sur la surface Φ_1, des courbes d'ordre $n—1$ rencontrant la conique γ_2 en un point variable.

Ou observera que les courbes C_2, C_3, ..., C_p passent par les points unis de l'involution I_p distincts du point A.

20. — Désignons par π le genre des sections hyperplanes de la surface Φ. Les courbes C_1 et par suite les courbes C sont alors, d'après la formule de Zeuthen, de genre $p(\pi—1)+1$.

Les courbes C_1' ont en A un point triple et $\frac{1}{2}(p—3)$ points doubles infiniment voisins; leur genre est par suite égal à $p(\pi—1)—\frac{1}{2}(p+3)+1$. Sur une courbe C_1' l'involution I_p détermine une involution cyclique d'ordre p ayant trois points unis : un dans le domaine du point P_1, deux dans le domaine du point P_2. D'après la formule de Zeuthen, les courbes Γ', découpées sur Φ par les hyperplans passant par A′, ou encore les sections hyperplanes Γ' de la surface Φ_1, ont donc le genre $\pi—2$. Cela résulte d'ailleurs également du fait que A′ est un point triple de la surface Φ.

Les courbes C_1'' ont dans chaque cas ($p=6\nu+1$ ou $p=6\nu+5$) une singularité au point A abaissant le genre de $\frac{3}{2}(p+1)$ unités. Sur une de ces courbes, l'involution déterminée par I_p possède trois points unis (dont un dans le domaine de P_2). Par conséquent, les courbes Γ'' qui correspondent sur Φ aux courbes C_1'', ou encore les sections hyperplanes de la surface Φ_2, ont le genre $\pi—3$.

De même, les sections hyperplanes de la surface Φ_3 ont le genre $\pi—4$ et ainsi de suite. D'une manière générale, les sections hyperplanes de la surface Φ_k auront le genre $\pi - k - 1$.

21. — Comme nous l'avons vu, le point triple A' de la surface Φ équivaut à l'ensemble, sur la surface Φ_1, d'une droite γ_1 et d'une conique γ_2 se rencontrant en un point A_1' double conique ou double biplanaire pour la surface.

Dans le premier cas, le point A_1' est équivalent à une courbe rationnelle γ, de degré -2, rencontrant en un point chacune des courbes γ_1, γ_2.

Dans le second cas, le point A_1' équivaut à deux droites γ_{11}, γ_{12}, tracées sur la surface Φ_2, se rencontrant en un point A_2' double conique, double biplanaire ou encore simple pour la surface Φ_2. L'ensemble des droites γ_{11}, γ_{12} rencontre chacune des courbes γ_1, γ_2 en un point. Pour fixer les idées, nous supposerons que γ_{11} rencontre γ_1 en un point et que γ_{12} rencontre γ_2 en un point également.

D'une manière générale, supposons qu'il y ait η points doubles de Φ infiniment voisins successifs de A', le dernier étant conique ou biplanaire ordinaire. Le k-ième point de cette suite est équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à l'ensemble de deux droites γ_{k1}, γ_{k2}, pour $k=1, 2, \ldots, \eta-1$. Si le dernier point de la suite est double conique, il est équivalent à une courbe rationnelle γ_η, de degré -2. Si, au contraire, il est double biplanaire ordinaire, il est équivalent à l'ensemble de deux courbes rationnelles de degré -2, ayant en commun un point simple.

Si nous considérons deux points doubles consécutifs, chacune des composantes de l'un rencontre une des composantes de l'autre, et inversement. On en conclut que la singularité de la surface Φ en A' est équivalente :

a) si le dernier point double de la série est conique, à un ensemble de $2\eta+3$ courbes rationnelles

$$\gamma_1, \gamma_{11}, \gamma_{21}, \ldots, \gamma_{k1}, \ldots, \gamma_\eta, \ldots, \gamma_{k2}, \ldots, \gamma_{22}, \gamma_{12}, \gamma_2, \tag{1}$$

chacune de ces courbes rencontrant en un point la précédente et la suivante, mais ne rencontrant pas les autres.

b) si le dernier point est double biplanaire ordinaire, à un ensemble de $2\eta+4$ courbes rationnelles

$$\gamma_1, \gamma_{11}, \gamma_{21}, \dots, \gamma_{\eta 1}, \gamma_{\eta 2}, \dots, \gamma_{22}, \gamma_{12}, \gamma_2, \tag{2}$$

deux courbes consécutives ayant un point commun et deux courbes non consécutives ne se rencontrant pas.

Dans le premier cas la courbe γ_η , dans le second la courbe $\gamma_{\eta 1}+\gamma_{\eta 2}$ sont de degré -2. Les courbes $\gamma_{\eta-1,1}+\gamma_\eta+\gamma_{\eta-1,2}$ et $\gamma_{\eta-1,1}+\gamma_{\eta 1}+\gamma_{\eta 2}+\gamma_{\eta-1,2}$ sont de degré -2; par conséquent les courbes $\gamma_{\eta-1,1}$, $\gamma_{\eta-1,2}$ sont de degré -2. Et ainsi de suite. On arrive à cette conclusion que les courbes de chacune des suites (1), (2), sauf la première γ_1 et la dernière γ_2, sont de degré -2.

Cela étant, A′ étant triple pour Φ, la courbe

$$\gamma_1+\gamma_{11}+\dots+\gamma_{12}+\gamma_2$$

est de degré -3, tandis que la courbe

$$\gamma_{11}+\dots+\gamma_{12}$$

est de degré -2. Les courbes γ_1, γ_2 rencontrent chacune en un point ce dernier ensemble et, d'autre part, ne se rencontrent pas. Par conséquent, si ν_1 est le degré de γ_1 et ν_2 celui de γ_2, on a

$$\nu_1+\nu_2=-5.$$

22. — A une courbe du système $|C|$, non transformée en elle-même par l'homographie T, correspond sur la surface Φ une courbe Γ^* variable, lorsque C varie, dans un système continu rationnel et appartenant par conséquent totalement à un système linéaire.

Lorsque la courbe C varie d'une manière continue dans $|C|$ et tend vers une courbe C_1, la courbe Γ^* varie d'une manière continue et tend vers une courbe Γ comptée p fois. Les courbes Γ^* appartiennent donc au système linéaire $|p\Gamma|$.

Faisons maintenant varier la courbe C d'une manière continue dans $|C|$ de manière qu'elle vienne coïncider avec une courbe C_2. La courbe Γ^* varie d'une manière continue dans $|p\Gamma|$ et tend vers une courbe Γ_2, comptée p fois, augmentée des composantes des points de diramation. On a donc

$$|p\Gamma| = |p\Gamma_2 + \lambda_1\gamma_1 + \lambda_{11}\gamma_{11} + \cdots + \lambda_{12}\gamma_{12} + \lambda_2\gamma_2 + \Delta_2|,$$

les λ étant des entiers positifs, nuls ou négatifs, en valeur absolue inférieurs à p, et Δ_2 le terme qui provient des points de diramation de la surface Φ, distincts de A'.

Coupons les courbes de ce système par une courbe Γ' en nous rappelant qu'une courbe C_2 et une courbe C_1' ont p points d'intersection confondus en A. Nous obtenons la relation

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 = p. \tag{1}$$

23. — Supposons que le dernier point de la suite de points doubles infiniment voisins successifs de A' soit conique. Coupons le système $|p\Gamma|$ successivement par les courbes $\gamma_1, \gamma_{11}, \ldots, \gamma_\eta, \ldots, \gamma_{12}, \gamma_2$. Nous obtenons les relations

$$\begin{aligned}
p + \lambda_1\nu_1 + \lambda_{11} &= 0,\\
\lambda_1 - 2\lambda_{11} + \lambda_{21} &= 0,\\
\lambda_{11} - 2\lambda_{21} + \lambda_{31} &= 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
\lambda_{22} - 2\lambda_{12} + \lambda_2 &= 0,\\
\lambda_{12} + \lambda_2\nu_2 &= 0.
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\lambda_{12} = -\lambda_2\nu_2,\ \lambda_{22} = -(2\nu_2+1)\lambda_2, \ldots,\ \lambda_\eta = -(\eta\nu_2 + \eta - 1)\lambda_2, \ldots,$$
$$\lambda_{11} = -[(2\eta-1)\nu_2 + 2\eta - 2]\lambda_2,\ \lambda_1 = -(2\eta\nu_2 + 2\eta - 1)\lambda_2.$$

Portons ces deux dernières valeurs dans la première des relations et dans la relation (1). Nous avons

$$\lambda_2[2\eta\nu_1\nu_2 + (2\eta - 1)(\nu_1 + \nu_2) + 2\eta - 2] = p,$$
$$(2\eta\nu_2 + 2\eta - 3)\lambda_2 + p = 0.$$

On en déduit tout d'abord, p étant premier, $\lambda_2 = 1$, d'où $\lambda_1 = p - 2$. En tenant compte de $\nu_1 + \nu_2 = -5$, on obtient

$$\nu_1 = -2, \qquad \nu_2 = -3, \qquad p = 4\eta + 3.$$

Supposons maintenant que le dernier point double de la suite infiniment voisine de A soit biplanaire ordinaire et coupons encore les courbes $p\Gamma$ par $\gamma_1, \gamma_{11}, \ldots, \gamma_2$. Nous obtiendrons encore des relations du même type que les précédentes, mais il y en aura une de plus. On en déduira

$$\lambda_{12} = -\nu_2\lambda_2, \lambda_{22} = -(2\nu_2 + 1)\lambda_2, \ldots, \lambda_{\eta 2} = -(\eta\nu_2 + \eta - 1)\lambda_2,$$
$$\lambda_{\eta 1} = -[(\eta + 1)\nu_2 + \eta]\lambda_2, \ldots, \lambda_{11} = -(2\eta\nu_2 + 2\eta - 1)\lambda_2,$$
$$\lambda_1 = -[(2\eta + 1)\nu_2 + 2\eta]\lambda_2.$$

On trouve cette fois

$$\lambda_2 = 1, \quad \lambda_1 = p - 2, \quad \nu_1 = -2, \quad \nu_2 = -3, \quad p = 4\eta + 5.$$

Observons que le nombre premier p est nécessairement de l'une des formes $p = 4\eta + 3$ ou $p = 4\eta + 5$. Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant :

La surface Φ possède au point de diramation A′ la multiplicité trois, le cône tangent étant formé d'un plan et d'un cône du second ordre.

Si p est de la forme $4\eta + 3$, la surface Φ possède une suite de η points doubles infiniment voisins successifs de A′, le dernier de ces points étant conique (et les autres biplanaires).

Si p est de la forme $4\eta + 5$, la surface Φ possède une suite de η points doubles infiniment voisins successifs de A′, le dernier de ces points étant biplanaire ordinaire (les autres étant également biplanaires).

Dans le cas $p=4\eta+3$, on a

$$|p\Gamma| = \left| \begin{array}{c} p\Gamma_2 + (p-2)\gamma_1 + (p-4)\gamma_{11} + \cdots + (2\eta+1)\gamma_\eta + \cdots \\ + 3\gamma_{12} + \gamma_2 + \Delta_2 \end{array} \right|.$$

Dans le cas $p=4\eta+5$, on a

$$|p\Gamma| = \left| \begin{array}{c} p\Gamma_2 + (p-2)\gamma_1 + (p-4)\gamma_{11} + \cdots + (2\eta+3)\gamma_{\eta 1} \\ + (2\eta+1)\gamma_{\eta 2} + \cdots + 3\gamma_{12} + \gamma_2 + \Delta_2 \end{array} \right|.$$

24. — On peut reprendre, pour les courbes Γ_3, le raisonnement fait pour les courbes Γ_2; on parvient ainsi à une relation fonctionnelle

$$|p\Gamma| = |p\Gamma_3 + \mu_1\gamma_1 + \mu_{11}\gamma_{11} + \cdots + \mu_{12}\gamma_{12} + \mu_2\gamma_2 + \Delta_3|,$$

où les μ sont des entiers compris entre $-p$ et $+p$, Δ_3 le terme qui provient des points de diramation de Φ distincts de A′

Pour déterminer les entiers μ, on considérera les intersections de $p\Gamma$ avec $\gamma_1, \gamma_{11}, \ldots, \gamma_2$ et l'on trouvera cette fois, les Γ_3 rencontrant γ_2 en un point variable,

$$\begin{gathered} \mu_{11} - 2\mu_1 = 0, \\ \mu_1 - 2\mu_{11} + \mu_{21} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mu_{22} - 2\mu_{12} + \mu_2 = 0, \\ \mu_{12} - 3\mu_2 + p = 0. \end{gathered}$$

En raisonnant comme plus haut, on trouvera, si $p=4\eta+3$,

$$|p\Gamma| = \left| \begin{array}{c} p\Gamma_3 + \gamma_1 + 2\gamma_{11} + \cdots + (\eta+1)\gamma_\eta + \cdots + 2\eta\gamma_{12} \\ + (2\eta+1)\gamma_2 + \Delta_3 \end{array} \right|,$$

et, si $p=4\eta+5$,

$$|p\Gamma| = \left| \begin{array}{c} p\Gamma_3 + \gamma_1 + 2\gamma_{11} + \cdots + (\eta+1)\gamma_{\eta 1} + (\eta+2)\gamma_{\eta 2} + \cdots \\ + (2\eta+1)\gamma_{12} + (2\eta+2)\gamma_2 + \Delta_3 \end{array} \right|.$$

25. — Soit $|\Gamma_p|$ le système linéaire qui, joint à $|\Gamma_2|$, donne des courbes dont le comportement en A′ est le même que celui des courbes Γ′. Nous avons donc

$$|\Gamma_2+\Gamma_p| = |\Gamma+\Gamma'| = |2\Gamma-\gamma_1-\gamma_{11}-\cdots-\gamma_{12}-\gamma_2|,$$

puisque

$$|\Gamma'| = |\Gamma-\gamma_1-\gamma_{11}-\cdots-\gamma_{12}-\gamma_2|.$$

Nous pourrons donc écrire

$$|p\Gamma_2+p\Gamma_p| = |2p\Gamma-p\gamma_1-p\gamma_{11}-\cdots-p\gamma_{12}-p\gamma_2|;$$

d'où, si $p=4\eta+3$,

$$|p\Gamma| = \left|\begin{array}{c} p\Gamma_p+2\gamma_1+4\gamma_{11}+\cdots+(2\eta+2)\gamma_\eta+\cdots+(p-3)\gamma_{12} \\ +(p-1)\gamma_2+\Delta_p \end{array}\right|,$$

et si $p=4\eta+5$,

$$|p\Gamma| = \left|\begin{array}{c} p\Gamma_p+2\gamma_1+4\gamma_{11}+\cdots+(2\eta+2)\gamma_{\eta 1}+(2\eta+4)\gamma_{\eta 2}+\cdots \\ +(p-3)\gamma_{12}+(p-1)\gamma_2+\Delta_p \end{array}\right|,$$

Δ_p étant dans chaque cas le terme qui provient des points de diramation de Φ distincts du point A′.

En coupant la courbe $p\Gamma$ successivement par les courbes γ_1, γ_{11}, ..., γ_2, on trouve aisément que les courbes Γ_p coupent la courbe γ_2 en deux points, mais ne rencontre pas les autres composantes du point singulier A′. On en conclut que sur la surface F les courbes C_p ont en A un point double suivi de $\frac{1}{2}(p-3)$ points doubles infiniment voisins successifs.

Appelons de même Γ_{p-1} les courbes telles que les courbes $\Gamma_3+\Gamma_{p-1}$ aient en A′ le même comportement que les courbes Γ′. En raisonnant comme tantôt, nous aurons

$$|p\Gamma_3+p\Gamma_{p-1}| = |2p\Gamma-p\gamma_1-p\gamma_{11}\cdots p\gamma_{12}-p\gamma_2|$$

et par conséquent

$$|p\Gamma| = \left| \begin{array}{l} p\Gamma_{p-1} + (p-1)\gamma_1 + (p-2)\gamma_{11} + \cdots + (3\eta+2)\gamma_\eta + \cdots \\ \qquad + (2\eta+3)\gamma_{12} + (2\eta+2)\gamma_2 + \Delta_{p-1} \end{array} \right|$$

si $p = 4\eta + 3$,

$$|p\Gamma| = \left| \begin{array}{l} p\Gamma_{p-1} + (p-1)\gamma_1 + (p-2)\gamma_{11} + \cdots + (3\eta+4)\gamma_{\eta 1} \\ + (3\eta+3)\gamma_{\eta 2} + \cdots + (2\eta+4)\gamma_{12} + (2\eta+3)\gamma_2 + \Delta_{p-1} \end{array} \right|$$

si $p = 4\eta + 5$, Δ_{p-1} étant le terme provenant de la présence de points de diramation de Φ, distincts du point A′.

Des relations fonctionnelles précédentes on déduit que dans chaque cas les courbes Γ_{p-1} rencontrent en un point chacune des courbes γ_1, γ_2, mais ne rencontrent pas les autres composantes γ_{11}, ..., γ_{12} du point singulier A′ Les courbes C_{p-1} ont donc en A un point double auquel sont infiniment voisins successifs dans une direction p—3 points simples fixes, dans une autre direction, $\frac{1}{2}(p—3)$ points simples fixes.

On retrouve donc (aux notations près) le résultat obtenu dans le cas du plan α(n° **12**).

26. — On pourrait poursuivre l'étude du comportement des courbes tracées sur Φ au point A′. Bornons-nous à la remarque suivante :

Le système $|\Gamma''|$ est donné par la relation fonctionnelle

$$|\Gamma| = |\Gamma'' + \gamma_1 + 2\gamma_{11} + 2\gamma_{21} + \cdots + 2\gamma_{22} + 2\gamma_{12} + \gamma_2|.$$

Coupons la courbe Γ par les courbes γ_1, γ_{11}, ..., γ_2. On trouve que les courbes Γ'' rencontrent en un point chacune des courbes γ_{11}, γ_{12}, γ_2, mais ne rencontrent pas les autres composantes du point singulier A′.

Nous allons rechercher les points de rencontre éventuels des courbes canoniques K de la surface Φ avec les composantes du point A′.

Observons tout d'abord que le système linéaire $|\Gamma|$ possède la courbe fondamentale monovalente (1)

$$\gamma_1 + \gamma_{11} + \gamma_{21} + \cdots + \gamma_{22} + \gamma_{12} + \gamma_2,$$

la courbe fondamentale bivalente

$$\gamma_1 + 2(\gamma_{11} + \gamma_{21} + \cdots + \gamma_{22} + \gamma_{12}) + \gamma_2,$$

etc.

Les courbes adjointes Γ_a au système $|\Gamma|$ rencontrent une courbe Γ' suivant des groupes de la série somme de la série canonique de cette courbe et de la série déterminée par les points de rencontre de la courbe avec la courbe $\gamma_1+\gamma_2$. Les mêmes courbes Γ_a rencontrent une courbe Γ'' suivant des groupes de la série somme de la série canonique de cette courbe et de la série déterminée par les points de rencontre de la courbe avec la courbe $\gamma_1+\gamma_2+2(\gamma_{11}+\gamma_{12})$. On en déduit, en tenant compte des valeurs π, $\pi-2$, $\pi-4$ des genres des courbes Γ, Γ', Γ'', que les courbes Γ_a rencontrent la courbe $\gamma_1+\gamma_2$ en un point, mais ne rencontrent pas les courbes γ_{11}, γ_{21}, ..., γ_{22}, γ_{12}. D'ailleurs, la somme de ces dernières courbes étant équivalente à un point double, elles ne peuvent avoir d'influence sur le système canonique de Φ.

Le système adjoint $|\Gamma_a'|$ à $|\Gamma'|$ satisfait à la relation fonctionnelle

$$|\Gamma_a| = |\Gamma_a' + \gamma_1 + \gamma_{11} + \cdots + \gamma_{12} + \gamma_2|;$$

par conséquent les courbes Γ_a' rencontrent la courbe $\gamma_1+\gamma_2$ en quatre points. Par suite, le système canonique $|K|=|\Gamma_a'-\Gamma'|$ de la surface Φ est formé de courbes rencontrant en un point la courbe $\gamma_1+\gamma_2$.

Envisageons les systèmes linéaires $|\Gamma_2|$ et $|\Gamma_2+\gamma_1|$. Puisque la courbe γ_1 est rationnelle, de degré -2 et est

(1) Cfr. ENRIQUES-CAMPEDELLI, *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche* (Padoue, 1932), chap. III, § 39.

rencontrée en un point par les courbes Γ_2, ces deux systèmes ont même genre et même degré. Par conséquent, les courbes Γ_2 et $\Gamma_2+\gamma_1$ sont rencontrées par les courbes canoniques K en un même nombre de points. La courbe γ_1 n'est donc pas rencontrée par les courbes canoniques et il en résulte que celles-ci coupent en un point la courbe rationnelle γ_2, de degré -3.

Les courbes canoniques de la surface Φ rencontrent en un point la composante γ_2 du point triple A'; elles ne rencontrent pas les autres composantes de ce point.

Liége, le 11 octobre 1937.