EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége,* N° 11, 1933.

Sur les involutions du second ordre de l'espace, n'ayant qu'un nombre fini de points unis,

par LUCIEN GODEAUX, Membre de la Société.

Les couples de points conjugués par rapport à trois quadriques ayant en commun huit points distincts forment une involution d'ordre deux n'ayant que huit points unis, les huit points communs aux trois quadriques.

Considérons une cubique gauche K et une correspondance birationnelle quadratique involutive θ entre les cordes de cette cubique gauche. La correspondance θ possède quatre cordes unies. Soit de plus Ω une polarité de l'espace. A un point P, faisons correspondre le point P' intersection du plan polaire de P par rapport à Ω et de la corde de K que θ fait correspondre à la corde de cette cubique gauche passant par P. Les points P, P' se correspondent dans une transformation birationnelle involutive et les couples P, P' forment donc une involution. Celle-ci possède huit points unis, les points d'intersection des quatre droites unies pour θ et de la quadrique fondamentale de la polarité Ω.

Nous avons ainsi deux exemples d'involutions d'ordre deux de l'espace n'ayant que huit points unis. On est conduit à se demander si toute involution d'ordre deux de l'espace, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, a précisément huit points unis. La réponse est affirmative et nous établissons précisément le théorème suivant :

Si le nombre des points unis d'une involution du second ordre de l'espace est fini, ce nombre est égal à huit.

Naturellement, il s'agit de points unis isolés. Il pourrait se faire que deux des points unis considérés fussent infiniment voisins, dans des directions différentes, d'un même point. Mais ce point serait équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à deux points unis distincts. Il est d'ailleurs facile de construire un exemple où cette circonstance se produit; nous ne nous y arrêterons pas pour l'instant.

1. Soit I_2 une involution d'ordre deux de l'espace, n'ayant qu'un nombre fini, α, de points unis. Désignons par T la transformation birationnelle génératrice de cette involution, par n son ordre.

A un plan φ, T fait correspondre une surface Φ d'ordre n et la courbe (φ, Φ), intersection de ce plan et de cette surface, est transformée en elle-même par T. Les couples de I_2 appartenant à la courbe (φ, Φ) forment une involution en général privée de points unis; donc nous désignerons le genre par π. La courbe (φ, Φ) a donc le genre $2\pi - 1$.

Le système linéaire complet $|F|$, déterminé par les surfaces $\varphi + \Phi$, formé de surfaces F d'ordre $n+1$, est transformé en lui-même par T. Il contient deux systèmes linéaires partiels composés au moyen de l'involution I_2; l'un, $|F_1|$, n'a pas pour points-base les points unis de l'involution I_2; l'autre, $|F_2|$, est formé de surfaces passant simplement par ces points. Le système $|F_2|$ comprend les surfaces lieu des intersections des plans φ d'un faisceau et des surfaces Φ correspondantes, ce qui démontre son existence.

Les adjointes F' d'ordre $n + 1 - 4 = n - 3$ aux surfaces F coïncident avec les adjointes d'ordre $n - 3$ aux surfaces Φ. La surface Φ étant rationnelle, ses adjointes F' d'ordre $n - 3$ découpent, sur le plan φ, le système complet des courbes adjointes à la courbe (φ, Φ) Il existe donc $2\pi - 1$ surfaces F' linéairement indépendantes, et par suite, le genre géométrique p_g de F est égal à $2\pi - 1$. D'autre part, les surfaces F sont régulières et leur genre arithmétique est égal à $2\pi - 1$.

Le système $|F|$ a le degré $2(3n+1)$ et la courbe variable C commune à deux surfaces F a le genre $4\pi + 4n - 5$.

2. Désignons par r la dimension du système $|F_1|$. Les surfaces F_1 formées d'un plan φ et de la surface Φ qui lui correspond sont en nombre ∞^3 et forment un système non linéaire; par suite, on a $r \geq 4$. En rapportant projectivement les surfaces F_1 aux hyperplans d'un espace linéaire S_r à r dimensions, on obtient une variété V à trois dimensions, d'ordre $3n+1$, image de l'involution I_2

A une surface F_1 correspond une section hyperplane Φ_1 de V. Rappelons qu'entre le genre arithmétique p_a d'une surface et le genre arithmétique p'_a d'une involution d'ordre deux n'ayant que σ points unis, on a la relation [1]

$$4(p_a + 1) = 8(p'_a + 1) - \sigma.$$

Les couples de I_2 appartenant à une surface F_1 forment une

[1] Voir L. Godeaux, Mémoire sur les surfaces algébriques doubles ayant un nombre fini de points de diramation. (*Annales de la Fac. des Sciences de Toulouse*, 1914, pp. 289-312.)

involution privée de points unis ; par suite, le genre arithmétique de la surface Φ_1 est égal à $\pi - 1$.

Les sections planes de la variété V sont des courbes Γ de genre $2(n + \pi - 1)$.

Aux surfaces F_2 correspondent, sur la variété V, des surfaces Φ_2 d'ordre $3n + 1$. Sur une surface F_2, les courbes de I_2 forment une involution ayant α points unis. Le genre arithmétique des surfaces Φ_2 est donc égal à $\pi - 1 + \frac{\alpha}{8}$.

Les courbes Γ_1 suivant lesquelles les surfaces Φ_2 rencontrent les surfaces Φ_1 ont le genre $2(n + \pi - 1)$ et les courbes caractéristiques du système $|\Phi_2|$, le genre $2(n + \pi - 1) - \frac{\alpha}{4}$.

3. Le système $|F'|$, adjoint au système $|F|$, est transformé en lui-même par T. Il contient donc deux systèmes linéaires partiels, $|F'_1|$, $|F'_2|$, composés au moyen de l'involution I_2. Sur une courbe (φ, Φ), les surfaces F'_1, F'_2 découpent les deux séries comprises dans la série canonique de cette courbe et formées de groupes de I_2 ; par conséquent, l'un des systèmes $|F'_1|$, $|F'_2|$ a la dimension $\pi - 1$, l'autre la dimension $\pi - 2$.

Aux systèmes $|F'_1|$, $|F'_2|$ correspondent sur V les systèmes adjoints aux systèmes $|\Phi_1|$, $|\Phi_2|$. Le genre arithmétique des surfaces Φ_1 étant $\pi - 1$ et cette surface étant régulière, le système $|\Phi'_1|$ adjoint à $|\Phi_1|$ a la dimension $\pi - 2$; c'est donc le transformé de celui des systèmes $|F'_1|$, $|F'_2|$ qui a la dimension $\pi - 2$. Nous supposerons que ce système est $|F'_1|$.

Au système $|F'_2|$ correspond, sur V, le système $|\Phi'_2|$ adjoint à $|\Phi_2|$. Supposons que le système $|\Phi'_2|$ ne découpe pas, sur une surface Φ_2, le système canonique complet de cette surface. Soit K une courbe canonique d'une surface Φ_2 n'appartenant pas à une surface Φ'_2. Il lui correspond, sur la surface F_2 homologue, une courbe canonique K′ de cette surface. Cette courbe est transformée en elle-même par T et appartient certainement à une surface F'_2, car le système $|F'|$ découpe, sur la surface F_2 en question, le système canonique complet et, d'autre part, la courbe K′ ne peut appartenir à une surface F'_1. Nous sommes donc conduit à une absurdité. Le système $|\Phi'_2|$ découpe donc sur une surface Φ_2 le système canonique complet. La surface Φ_2 étant régulière et de genre arithmétique $\pi - 1 + \frac{\alpha}{8}$, le système $|\Phi'_2|$ a, d'une part, la dimension $\pi - 2 + \frac{\alpha}{8}$; d'autre part, la dimension $\pi \quad 1$ de $|F'_2|$. On a donc $\alpha = 8$.

4. La variété V possède, aux huit points de diramation, des points quadruples ; le cône tangent en un de ces points à la variété V est le cône projetant une surface de Véronèse [1]. Chacun de ces points est équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à une surface rationnelle. Nous désignerons par A_1, A_2, ..., A_8 ces huit points et la surface rationnelle à laquelle le point A_i est équivalent sera également représentée par A_i.

A une surface F non transformée en elle-même par T correspond, sur la variété V, une surface Φ. Lorsque la surface F varie d'une manière continue dans le système $|F|$ et vient coïncider avec une surface F_1, la surface Φ varie d'une manière continue et sur V et vient coïncider avec une surface Φ_1 comptée deux fois. De même, si F varie de manière à venir coïncider avec une surface F_2, Φ vient coïncider avec une surface Φ_2 comptée deux fois, augmentée des surfaces A_1, A_2, ..., A_8. Les surfaces $2\,\Phi_1$, $2\,\Phi_2 + A_1 + \ldots, + A_8$ appartiennent donc au même système linéaire et l'on a

$$|\,2\Phi_1\,| = |\,2\Phi_2 + A_1 + A_2 + \cdots + A_8\,|.$$

Une surface Φ_2 a, aux points A_1, A_2, ..., A_8, des points doubles coniques. En représentant par (L, M) l'intersection de deux surfaces L, M tracées sur V, on a, sur une surface Φ_2 déterminée,

$$|\,2(\Phi_2\Phi_2) + (A_1\Phi_2) + \cdots + (A_8\Phi_2)\,| = |\,2(\Phi_1, \Phi_2)\,|.$$

Sur une surface Φ_1 déterminée, on a

$$|\,2(\Phi_1\Phi_1)\,| = |\,2(\Phi_2\Phi_1)\,|.$$

Les surfaces Φ_1 ont, comme on sait, le diviseur $\sigma = 2$.

Liége, le 29 octobre 1933.

---

[1] L. Godeaux, Sur les involutions cycliques appartenant à une variété algébrique à trois dimensions. (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1931, pp. 29-39.)

M. HAYEZ, Impr. de l'Académie royale, 112, rue de Louvain, Bruxelles.