Bull. Soc. Royale Sciences Liège, 32e année, n° 10, 1963, pp. 705-708

CONGRUENCES W DONT LES COMPLEXES LINÉAIRES OSCULATEURS SONT EN NOMBRE SIMPLEMENT INFINI

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de le Société

M. Rozet (1) et Mad. Read-Derchain (2) se sont occupés des congruences W dont les complexes linéaires osculateurs dépendent d'un paramètre ; ils en ont donné les conditions analytiques. Nous voudrions dans cette note reprendre cette question en utilisant les quatre suites de Laplace que nous avons associées, dans un espace linéaire à cinq dimensions, à une congruence W (3). Nous supposons que les nappes focales de cette congruence W sont distinctes, excluant ainsi le cas où la congruence est formée de tangentes asymptotiques à une surface.

1. Soient (j) une congruence W, (x) et $(\bar{x})$ ses nappes focales, u, v les asymptotiques de ces surfaces.

A la surface (x) nous associons dans l'espace linéaire à cinq dimensions S_5 une suite de Laplace L,

$$\ldots, U^n, \ldots, U^1, U, V, V^1, \ldots, V^n, \ldots \qquad (L)$$

Manuscrit reçu le 17 octobre 1963.

(1) O. ROZET, *Recherches sur les congruences de droites* (Bulletin de la Société roy. des Sciences de Liège, 1941, pp. 138-167).

(2) C. READ-DERCHAIN, *Sur les congruences* W (Idem, 1963, pp. 24-26). Mad. Read modifie en un point les développements analytiques de M. Rozet mais parvient aux mêmes résultats.

(3) L. GODEAUX, *Sur la théorie des congruences* W (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1954, pp. 1028-1037 ; 1955, pp. 343-345 ; 1956, pp. 240-244), *Sulle congruenze* W (Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni, 1954, pp. 36-45).

Nous utilisons dans cette note les résultats de notre exposé sur *La Théorie des surfaces et l'espace réglé*, Actualités scient. N° 138 (Paris, Hermann, 1934). Nous modifions les notations en indiquant par un indice supérieur (au lieu d'un indice inférieur) les points des suites de Laplace et nous indiquons les dérivations par des indices inférieurs.

dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u, les points U, V représentant sur l'hyperquadrique de Klein Q les tangentes xx_u, xx_v aux asymptotiques u, v de (x) en un point x.

De même, à la surface $(\bar{x})$, nous associons d'une manière analogue une suite de Laplace $\bar{\mathrm{L}}$,

$$\ldots, \bar{\mathrm{U}}^n, \ldots, \bar{\mathrm{U}}^1, \bar{\mathrm{U}}, \bar{\mathrm{V}}, \bar{\mathrm{V}}^1, \ldots, \bar{\mathrm{V}}^n, \ldots \qquad (\bar{\mathrm{L}})$$

Les droites UV, $\overline{\mathrm{UV}}$ appartiennent à Q et se coupent en un point J image de la droite j. Le point J décrit un réseau conjugué (u, v) et appartient à une suite de Laplace $\mathscr{J}$,

$$\ldots, \mathrm{J}^n, \ldots, \mathrm{J}^1, \mathrm{J}, \mathrm{J}^{-1}, \ldots, \mathrm{J}^{-n}, \ldots \qquad (\mathscr{J})$$

inscrites dans les suites L et $\bar{\mathrm{L}}$. Le point J^n est l'intersection des droites $\mathrm{U}^{n-1}\,\mathrm{U}^n$ et $\bar{\mathrm{U}}^{n-1}\,\bar{\mathrm{U}}^n$, le point J^{-n} celui des droites $\mathrm{V}^{n-1}\,\mathrm{V}^n$ et $\bar{\mathrm{V}}^{n-1}\,\bar{\mathrm{V}}^n$. Dans la suite $\mathscr{J}$, chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u.

Désignons par P le pôle de l'hyperplan $\mathrm{J}^2\mathrm{J}^1\mathrm{J}\mathrm{J}^{-1}\mathrm{J}^{-3}$, image du complexe linéaire osculateur à la congruence (j), par P^n le pôle de l'hyperplan $\mathrm{J}^{n-3}\mathrm{J}^{n-1}\mathrm{J}^n\mathrm{J}^{n+1}\mathrm{J}^{n+2}$ et enfin par P^{-n} celui de l'hyperplan $\mathrm{J}^{-n-2}\mathrm{J}^{-n-1}\mathrm{J}^{-n}\mathrm{J}^{-n+1}\mathrm{J}^{-n+2}$. Les points $\mathrm{P}, \mathrm{P}^n, \mathrm{P}^{-n}$ appartiennent à une suite de Laplace $\mathscr{P}$,

$$\ldots, \mathrm{P}^n, \ldots, \mathrm{P}^1, \mathrm{P}, \mathrm{P}^{-1}, \ldots, \mathrm{P}^{-n}, \ldots, \qquad (\mathscr{P})$$

où chaque point est le transformé du précédent dans le sens des v.

Le point P est l'intersection des droites $\mathrm{U}\bar{\mathrm{U}}$ et $\mathrm{V}\bar{\mathrm{V}}$, le point P^n celui des droites $\mathrm{V}^n\bar{\mathrm{V}}^n$ et $\mathrm{V}^{n-1}\bar{\mathrm{V}}^{n-1}$, enfin P^{-n} celui des droites $\mathrm{U}^n\bar{\mathrm{U}}^n$ et $\mathrm{U}^{n-1}\bar{\mathrm{U}}^{n-1}$. La suite $\mathscr{P}$ est donc circonscrite aux suites L et $\bar{\mathrm{L}}$.

Actuellement, le point P doit décrire une courbe au lieu d'une surface. Nous commencerons par introduire ce point par une voie géométrique.

2. Considérons la droite $\mathrm{U}\bar{\mathrm{U}}$. Lorsque u varie seul, cette droite engendre une surface réglée et le lieu des plans tangents aux points d'une génératrice $\mathrm{U}\bar{\mathrm{U}}$ de cette surface est un espace déterminé par les droites UV et $\overline{\mathrm{UV}}$. Or ces droites se rencontrent en un point J, donc cet espace tangent est un plan et la surface est une développable.

De même, lorsque u varie seul, la droite $\mathrm{V}\bar{\mathrm{V}}$ engendre une développable dont la plan tangent le long d'une génératrice $V\overline{V}$ contient les points V^1, $\overline{V}^1$. Il en résulte que la tangente à une courbe u décrite par le point P doit se trouver dans le plan $U\overline{U}V$ et dans le plan $V\overline{V}V^1$, c'est donc la droite $V\overline{V}$.

On démontre de même que la tangente à la courbe v décrite par le point P est la droite $U\overline{U}$.

Par une démonstration analogue, on montre que les tangentes aux courbes u, v décrites par le point P^1 intersection des droites $V\overline{V}$ et $V^1\overline{V}^1$ sont respectivement les droites $V^1\overline{V}^1$ et $V\overline{V}$. Enfin, les tangentes aux courbes u, v décrites par le point P^{-1} intersection des droites $U\overline{U}$ et $U^1\overline{U}^1$ sont respectivement les droites $U\overline{U}$ et $U^1\overline{U}^1$.

Observons que le point P^1 ne peut coïncider avec le point P. Alors en effet les droites $V\overline{V}$ et $V^1\overline{V}^1$ devraient coïncider et la développable engendrée lorsque u varie seul par la droite $V\overline{V}$ aurait trois arêtes de rebroussement engendrées par les points V, $\overline{V}$ et P, ce qui est absurde.

De même, le point P^{-1} ne peut coïncider avec le point P.

3. Le point P décrivant une courbe lorsque u, v varient, doit dépendre d'une fonction $\varphi(u, v)$ de u, v Les tangentes au point P aux courbes u, v coïncident en une seule droite PP_φ. Mais alors les droites $U\overline{U}$ et $V\overline{V}$ doivent coïncider, ce qui n'est possible que si $\overline{U}$ coïncide avec U et V avec $\overline{V}$. Dans ces conditions, les nappes focales (x) et $(\overline{x})$ coïncideraient et les droites j seraient des tangentes sayptotiques à la surface (x), cas qui a été exclus.

Il en résulte que le point P dépend d'une seule des variables u ou v.

Supposons que P dépende seulement de v. Alors les tangentes aux courbes v aux points d'une courbe u de la surface (P^1) passent par un point fixe P et la suite $\mathscr{P}$ se termine donc au point $\mathscr{P}$ en présentant le cas de Laplace. La droite $U\overline{U}$ est actuellement tangente à la courbe (P). Une de ces tangentes rencontre l'hyperquadrique Q en deux points U, $\overline{U}$ qui sont indépendants de u. Il en résulte que les surfaces (x) et $(\overline{x})$ sont des réglées dont les génératrices rectilignes sont les courbes u.

On voit de même que si P dépend de u seul, les surfaces (x) et $(\overline{x})$ sont des réglées dont les génératrices rectilignes sont les courbes v.

Si les complexes linéaires osculateurs à une congruence W sont en nombre simplement infini, les nappes focales de cette congruence sont des réglées dont les génératrices rectilignes se correspondent.

Liège, le 24 septembre 1963.