

## Sur les surfaces liées à une suite de Laplace périodique

Au Professeur K. STRUBECKER, pour ses 60 ans

Par

LUCIEN GODEAUX

A une surface  $(x)$  rapportée à ses asymptotiques  $u, v$ , nous avons associé dans un espace linéaire à cinq dimensions, une suite de Laplace  $L$  déterminée par les points de l'hyperquadrique  $Q$  de Klein qui représentent les tangentes aux asymptotiques de la surface  $(x)$  [2]. Cette suite  $L$  nous a permis notamment d'étudier les couples de surfaces ayant mêmes quadriques de Lie, surfaces rencontrées autrefois par Demoulin [1]. Dans ce cas, les suites  $L$  attachées aux deux surfaces d'un couple coïncident en une suite de période six. Cela suggère l'étude des surfaces attachées à une suite périodique, la période étant nécessairement paire. Nous sommes parvenu à étudier la suite de période huit. Dans ce cas, il existe deux surfaces attachées à la suite, les quadriques de Lie de ces deux surfaces se touchant en quatre points, c'est-à-dire ayant en commun le quadrilatère de Demoulin. Dans cette note, nous apportons une contribution au cas général.

1. Soit  $(x)$  une surface de l'espace ordinaire rapportée à ses asymptotiques  $u, v$ . Dénotons par  $U, V$  les points de l'hyperquadrique  $Q$  de Klein, de  $S_5$ , représentant les tangentes  $xx_u, xx_v$  aux lignes  $u, v$  en un point  $x$  de la surface  $(x)$ . On a

$$U_u + 2bV = 0, \quad V_v + 2aU = 0.$$

Les points  $U, V$  sont donc transformés de Laplace l'un de l'autre et déterminent une suite de Laplace  $L$ ,

$$(L) \quad \dots, U^n, \dots, U^1, U, V, V^1, \dots, V^n, \dots$$

où chaque point est le transformé de Laplace du précédent dans le sens des  $u$ .

Nous poserons

$$\begin{aligned} U_v^n &= U^{n+1} + U^n (\log b h_1 \cdots h_n)_v, & U_u^{n+1} &= h_{n+1} U^n, \\ V_u^n &= V^{n+1} + V^n (\log a k_1 \cdots k_n)_u, & V_v^{n+1} &= k_{n+1} V^n, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} h_n &= -(\log b h_1 \cdots h_{n-1})_{uv} + h_{n-1}, \\ k_n &= -(\log a k_1 \cdots k_{n-1})_{uv} + k_{n-1}. \end{aligned}$$

Pour abrégé, nous écrirons

$$H^n = \log b h_1 \cdots h_n, \quad K^n = \log a k_1 \cdots k_n,$$

avec

$$H^0 = \log b, \quad K^0 = \log a.$$

Ceci rappelé, nous allons supposer que la suite  $L$  a la période  $2n + 2$ , c'est-à-dire que le point  $U^{n+1}$  coïncide avec le point  $V^n$  et le point  $V^{n+1}$  avec le point  $U^n$ .

Rappelons aussi que la suite  $L$  est autopolaire par rapport à  $Q$ ; les points  $U^n$  et  $V^{n+1}$  sont conjugués, de même que les points  $U^{n+1}$  et  $V^n$ , ils appartiennent donc à l'hyperquadrique  $Q$ . Il en est de même de la droite  $U^n V^n$ . Il existe une surface  $(\bar{x})$  d'asymptotiques  $u, v$ , telle que les tangentes  $\bar{x}\bar{x}_u, \bar{x}\bar{x}_v$  ont pour images sur  $Q$  les points  $V^n, U^n$ . La suite  $L$  attachée à la surface  $(x)$  coïncide avec la suite  $L$  liée à la surface  $(\bar{x})$ .

2. La suite ayant la période  $2n + 2$ , le point  $U^{2n+2}$  coïncide avec le point  $U$ . Ce dernier satisfait à l'équation de Laplace

$$(1) \quad U_{uv} - H_v^0 U_u - 4abU = 0$$

et le point  $U^{2n+2}$  à l'équation de Laplace

$$(2) \quad U_{uv}^{2n+2} - H_v^{2n+2} U_u^{2n+2} - h_{2n+2} U^{2n+2} = 0.$$

Posons, dans cette seconde équation,  $U^{2n+2} = \lambda U$ . Elle devient

$$\lambda U_{uv} + U_u [\lambda v - H_v^{2n+2}] + \lambda_u U_v + [\lambda_{uv} - \lambda_u H_v^{2n+2} - h_{2n+2}] U = 0.$$

Cette équation étant identique à l'équation (1), on a

$$\frac{\lambda}{1} = \frac{\lambda v - H_v^{2n+2}}{H_v^0} = \frac{\lambda_{uv} - \lambda_u H_v^{2n+2} - h_{2n+2}}{-4ab}, \quad \lambda_u = 0.$$

On en déduit

$$(3) \quad (\log \lambda)_v = H_v^{2n+2} - H_v^0, \quad h_{2n+2} = 4ab, \quad \lambda_u = 0$$

et

$$(\log \lambda)_v = (\log ab h_1 \cdots h_{2n+1})_v,$$

ou encore

$$(\log \lambda)_{uv} = (\log ab h_1 \cdots h_{2n+1})_{uv} = 0.$$

Réciproquement, si nous avons

$$(\log ab h_1 \cdots h_{2n+1})_{uv} = 0, \quad h_{2n+2} = 4ab,$$

nous pourrons trouver une valeur de  $\lambda$  satisfaisant aux équations (3) et en remplaçant dans l'équation (1),  $U$  par  $\lambda U$ , on retrouve l'équation (2). On a donc  $U^{2n+2} = \lambda U$  et la suite  $L$  a la période  $2n + 2$ .

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que la suite  $L$  ait la période  $2n + 2$  sont que l'on ait

$$(\log ab h_1 \cdots h_{2n+1})_{uv} = 0, \quad h_{2n+2} = 4ab.$$

Observons que la condition  $h_{2n+2} = 4ab$  peut être remplacée par

$$(\log b^{2n+2} h_1^{2n+1} \cdots h_{2n+1})_{uv} = 0.$$

3. Au lieu de partir du fait que les points  $U^{2n+2}$  et  $U$  coïncident, on aurait pu partir de l'identité des points  $V$  et  $V^{2n+2}$ . Si l'on pose  $V^{2n+2} = \mu V$ , on trouve les relations

$$(\log \mu)_u = K_u^{2n+2} - K_u^0, \quad k_{2n+2} = 4ab, \quad \mu_v = 0$$

et ensuite

$$(\log ab k_1 \cdots k_{2n+1})_{uv} = 0.$$

Ces conditions sont équivalentes aux précédentes, car les points  $U^{n-i}$  et  $V^{n+i+1}$ , doivent coïncider et les équations de Laplace auxquelles ils satisfont ont des invariants égaux. On a donc

$$h_{n-i+1} = k_{n+i+1},$$

où l'on doit poser  $h_0 = 4ab$  et  $k_0 = 4ab$ .

4. Nous avons  $U^{2n+2} = \lambda U$  avec  $\lambda_u = 0$ . Dérivons totalement cette équation par rapport à  $u$ , nous trouvons

$$h_{2n+2} U^{2n+1} + 2b \lambda V = 0,$$

et comme  $h_{2n+2} = 4ab$ ,

$$\lambda V + 2a U^{2n+1} = 0.$$

En dérivant de nouveau cette relation par rapport à  $u$ , on trouve

$$\lambda [V^1 + V K_u^0] + 2a K_u^0 U^{2n+1} + 2a h_{2n+1} U^{2n} = 0,$$

c'est-à-dire, puisque  $h_{2n+1} = k_1$ ,

$$\lambda V^1 + 2a k_1 U^{2n} = 0.$$

En dérivant successivement cette relation et les suivantes par rapport à  $u$ , et en tenant compte de  $h_{n+i} = k_{n-i}$ , on trouve

$$\lambda V^i + 2a k_1 \cdots k_i U^{2n+1-i} = 0.$$

En particulier, on a

$$\lambda V^n + 2a k_1 k_2 \cdots k_n U^{n+1} = 0,$$

$$\lambda V^{n+1} + 2a k_1 k_2 \cdots k_{n+1} U^n = 0.$$

Nous avons également  $V^{2n+2} = \mu V$  avec  $\mu_v = 0$ . En dérivant la relation par rapport à  $v$ , on a

$$\mu U + 2b V^{2n+1} = 0.$$

En dérivant successivement par rapport à  $v$ , on obtient

$$\mu U^i + 2b h_1 \cdots h_i V^{2n+1-i} = 0.$$

En particulier, on a

$$\mu U^n + 2b h_1 \cdots h_n V^{n+1} = 0,$$

$$\mu U^{n+1} + 2b h_1 \cdots h_{n+1} V^n = 0.$$

En comparant les relations liant  $U^n$  et  $V^{n+1}$ , ou  $U^{n+1}$  et  $V^n$ , on trouve

$$\lambda \mu = 4ab k_1 \cdots k_n h_1 \cdots h_{n+1},$$

c'est-à-dire, en tenant compte des relations entre les  $h$  et les  $k$ ,

$$\lambda \mu = 4 a b h_1 \cdots h_{2n+1} = 4 a b k_1 \cdots k_{2n+1}.$$

5. Modifions les paramètres des asymptotiques de la surface  $(x)$  en posant

$$u = \varphi(u'), \quad v = \psi(v')$$

et appelons  $h'_1, h'_2, \dots, h'_{2n+1}$  ce que deviennent  $h_1, h_2, \dots, h_{2n+1}$ .

On sait que l'on a

$$h'_1 = h_1 \varphi' \psi', \quad h'_2 = h_2 \varphi' \psi', \quad \dots, \quad h'_{2n+1} = h_{2n+1} \varphi' \psi'.$$

Par conséquent, il vient

$$4 a b h'_1 h'_2 \cdots h'_{2n+1} = 4 a b h_1 h_2 \cdots h_{2n+1} (\varphi' \psi')^{2n+1}.$$

Si la suite  $L$  a la période  $2n + 2$ , on doit avoir

$$(\log 4 a b h'_1 h'_2 \cdots h'_{2n+1})_{uv} = 0$$

et on peut choisir les fonctions  $\varphi, \psi$  de manière à avoir

$$4 a b h'_1 h'_2 \cdots h'_{2n+1} = 1.$$

Dans ces conditions, on a  $\lambda_u = 0, \lambda_v = 0$  et  $\lambda$  est une constante.

*Si la suite  $L$  a la période  $2n + 2$ , on peut choisir les paramètres des asymptotiques de la surface  $(x)$  de telle sorte qu'il existe une constante  $\lambda$  telle que  $U^{2n+2} = \lambda U$ .*

Observons que ce choix étant fait, on a  $\lambda \mu = 1$  et  $\mu$  est également une constante.

6. Considérons les plans  $U^m U^{m+1} U^{m+2}$  et  $V^m V^{m+1} V^{m+2}$ , où  $m \leq n - 2$ . Ils sont conjugués par rapport à  $Q$  et leurs sections par cette hyperquadrique représentent deux demi-quadriques de même support  $\Phi_m$ . On obtient ainsi une suite de  $n - 1$  quadriques  $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_{n-2}$  dont la première est la quadrique de Lie attachée au point  $x$  la surface  $(x)$  et la dernière  $\Phi_{n-2}$  la quadrique de Lie attachée au point  $\bar{x}$  à la surface  $(\bar{x})$ .

Nous avons établi que deux quadriques consécutives de cette suite se touchent en quatre points caractéristiques pour les deux quadriques. La quadrique de Lie oscule la surface  $(x)$  au point  $x$  et la quadrique  $\Phi_{n-2}$  oscule la surface  $(\bar{x})$  au point  $\bar{x}$ .

7. La droite  $U^1 V^1$  coupe l'hyperquadrique  $Q$  en deux points  $W^1, W^2$  qui représentent les directrices de Wilczynski  $w^1, w^2$  de la surface  $(x)$  au point  $x$ . Nous supposons que  $w^1$  passe par  $x$  et donc que  $w^2$  se trouve dans le plan tangent  $\xi$  à  $(x)$  au point  $x$ .

De même, la droite  $U^{n-1} V^{n-1}$  coupe l'hyperquadrique  $Q$  en deux points  $\bar{W}^1, \bar{W}^2$  représentant les directrices de Wilczynski  $\bar{w}^1, \bar{w}^2$  de la surface  $(\bar{x})$  au point  $\bar{x}$ . Nous supposons que  $\bar{w}^1$  passe par  $\bar{x}$  et donc que  $\bar{w}^2$  se trouve dans le plan tangent  $\bar{\xi}$  à  $(\bar{x})$  au point  $\bar{x}$ .

Les plans  $U V W^1, U^n V^n \bar{W}^1$  appartiennent à  $Q$  et représentent respectivement les gerbes de rayons de sommets  $x, \bar{x}$ . Ils ont en commun le point  $R^1$  image de la droite  $x\bar{x}$ . Ils appartiennent donc à un hyperplan  $U V U^n V^n R^1$  tangent à  $Q$  en  $R^1$ .

Les plans  $UVW^2$ ,  $U^n V^n \bar{W}^2$  appartiennent également à  $Q$  et représentent les plans réglés  $\xi, \bar{\xi}$  tangents aux surfaces  $(x), (\bar{x})$ . Ils ont en commun un point  $R^2$  représentant la droite intersection des plans  $\xi, \bar{\xi}$ . Ces deux plans appartiennent à un hyperplan  $UVU^n V^n R^2$  touchant  $Q$  en  $R^2$ .

Les points  $R^1, R^2$  sont conjugués des points  $U, V, U^n, V^n$  de sorte que la section de  $Q$  par l'espace à trois dimensions  $UVU^n V^n$  représente la congruence de droites dont les directrices sont les droites  $x\bar{x}$  et  $\xi\bar{\xi}$ .

8. Désignons par  $\Omega(p, q) = 0$  la condition pour que deux points  $p, q$  soient conjugués par rapport à l'hyperquadrique  $Q$ , de telle sorte que l'équation de celle-ci soit  $\Omega(p, p) = 0$ . Posons

$$\Omega(U^{n-1}, U^{n-1}) = 2A\Delta, \quad \Omega(V^{n-1}, V^{n-1}) = 2B\Delta,$$

où

$$\Delta = |xx_u x_v x_{uv}|$$

est une constante (voir [2]).

Dérivons la première relation par rapport à  $v$ . On a, en observant que

$$\Omega(U^{n-1}, U^n) = 0, \quad \Omega(U^{n-1}, U^{n-1})H_v^{n-1} = A_v\Delta,$$

c'est-à-dire

$$2AH_v^{n-1} = A_v.$$

On en conclut

$$A = (bh_1 h_2 \cdots h_{n-1})^2 \chi_1(u),$$

où  $\chi_1(u)$  est une fonction arbitraire de  $u$ .

On obtient de même

$$B = (ak_1 k_2 \cdots k_{n-1})^2 \chi_2(v),$$

où  $\chi_2(v)$  est une fonction arbitraire de  $v$ .

On voit donc que les points  $U^{n-1}, V^{n-1}$  ne peuvent appartenir à  $Q$ , les invariants  $h$  et  $k$  étant nécessairement différents de zéro.

#### Bibliographie

- [1] A. DEMOULIN, Sur la quadrique de Lie. C. R. Acad. Sci. Paris **147**, 493—496 (1908).  
 [2] L. GODEAUX, La Théorie des Surfaces et l'Espace réglé. Paris 1934.  
 [3] L. GODEAUX, Sur les surfaces ayant mêmes quadrilatères de Demoulin, I, II. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V Sér. **39**, 245—254, 363—368 (1953).

Eingegangen am 16. 1. 1964

Anschrift des Autors:

Lucien Godeaux  
 37, quai Orban  
 Liège, Belgique