Bull. Soc. Royale Sciences Liège, 32e année, no 11-12, 1963, pp. 811-813

SURFACES ASSOCIÉES A UNE SUITE DE LAPLACE TERMINÉE
(seconde note)

par LUCIEN GODEAUX
Membre de la Société

Dans la première note, nous avons considéré une surface (x) associée à une suite de Laplace L de période $2n + 2$ et nous avons donné les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une telle surface [1]. Les points U^{2n+2} et U doivent coïncider ; nous montrons ici qu'un choix convenable des coordonnées curvilignes u, v des asymptotiques de la surface (x) permet de supposer que le facteur de proportionnalité des coordonnées des deux points est une constante.

1. Soient (x) une surface rapportée à ses asymptotiques u, v et

$$\ldots, U^n, \ldots, U^1, U, V, V^1, \ldots, V^n, \ldots \tag{L}$$

la suite de Laplace L qui lui est associée et que nous supposerons de période $2n + 2$ $(n \geqslant 2)$.

Nous devons avoir $U^{2n+2} = \lambda U$ et nous avons montré que l'on a

$$(\log \lambda)_v = (\log h_1 h_2 \ldots h_{2n+2})_v, \quad \lambda_\mu = 0, \quad h_{2n+2} = 4ab. \tag{1}$$

La première relation devient, en tenant compte de la troisième,

$$(\log \lambda)_v = (\log abh_1h_2 \ldots h_{2n+1})_v. \tag{1'}$$

Remplaçons les coordonnées curvilignes u, v par des coordonnées u', v' données par

$$u = \varphi(u'), \quad v = \psi(v').$$

On a, en désignant par a', b', h'_1, ..., h'_{2n+1} ce que deviennent a, b, h_1, ..., h_{2n+1},

Manuscrit reçu le 21 novembre 1963.

[1] *Bulletin de la Société roy. des Sciences de Liège*, 1963, pp. 597-601.

$$a' = a\psi',\ b' = b\varphi';\ h'_1 = h_1\varphi'\psi',\ \ldots,\ h'_{2n+1} = h_{2n+1}\varphi'\psi',$$

d'où

$$4a'b'h'_1 \ldots h'_{2n+1} = 4abh_1 \ldots h_{2n+1}(\varphi'\psi')^{2n+2}.$$

Nous pouvons choisir les fonctions $\varphi(u')$, $\psi(v')$ de telle sorte que le premier membre soit égal à l'unité. Cela étant, supposons cette opération faite et retournons à nos anciennes notations, c'est-à-dire supposons

$$4abh_1 \ldots h_{2n+1} = 1.$$

Les équations (1) et (1') donnent

$$\lambda_u = 0,\ \lambda_v = 0$$

et λ *est une constante.*

2. Reprenons la relation

$$U^{2n+2} = \lambda U$$

où λ est une constante et dérivons la totalement par rapport à u. Nous obtenons

$$h_{2n+2}U^{2n+1} + 2b\lambda V = 0$$

ou, en tenant compte de la valeur de h_{2n+2},

$$\lambda V + 2aU^{2n+1} = 0.$$

En dérivant de nouveau totalement cette relation par rapport à u, on a

$$\lambda[V^1 + V(\log a)_u] + 2aU^{2n+1}(\log a)_u + h_{2n+1}U^{2n} = 0.$$

Nous savons que l'on a

$$h_{n-i+1} = k_{n+i+1}, \tag{2}$$

i étant un entier positif ou négatif. On a donc $h_{2n+1} = k_1$ et

$$kV^1 + 2ak_1U^{2n} = 0.$$

En dérivant successivement cette relation par rapport à u, on obtient finalement

$$\lambda V^i + 2ak_1 \ldots k_iU^{2n-i+1} = 0, \tag{3}$$

$i = 0,\ 1,\ \ldots,\ 2n + 1.$

3. En partant de la relation

$$V^{2n+2} = \mu V,$$

où l'on a

$$(\log \mu)_u = (\log abk_1 \ldots k_{2n+1})_u,\ \mu_v = 0,\ k_{2n+2} = 4ab,$$

on obtient de même, en dérivant totalement successivement par rapport à v,

$$\begin{aligned} \mu U + 2b V^{2n+1} &= 0, \\ \mu U^1 + 2b h_1 V^{2n} &= 0, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \mu U^i + 2b h_1 \ldots h_i V^{2n-i+1}&. \end{aligned} \tag{4}$$

Observons d'ailleurs qu'en vertu de la relation (2) pour $i = -n, -n+1, \ldots, n-1, n$, nous avons

$$4abk_1k_2 \ldots k_{2n+1} = 4abh_1h_2 \ldots h_{2n+1} = 1$$

donc μ *est une constante.*

Les points V^{n+1} et U^n coïncident. Les équations (3) et (4) donnent

$$\begin{aligned} kV^{n+1} + 2ak_1 \ldots k_{n+1}U^n &= 0, \\ \mu U^n + 2bh_1 \ldots h_n V^{n+1} &= 0. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\lambda\mu = 2ak_1 \ldots k_{n+1} 2bh_1 \ldots h_n$$

ou, en utilisant la relation (2),

$$\lambda\mu = 4abh_1h_2 \ldots h_{2n+1} = 1.$$

λ et μ sont donc des constantes inverses l'une de l'autre.

Liège, le 18 novembre 1963.