Celebrazioni archimedee
del secolo XX, Siracusa 11-16 aprile 1961.
Vol. I: conferenze generali e simposio di geometria differenziale,
pag. 73-78. Presidente: WILHELM BLASCHKE.

SOPRA UNA SUPERFICIE LEGATA AD UNA SUCCESSIONE DI LAPLACE CHIUSA

DI LUCIEN GODEAUX, A LIEGI.

Abbiamo recentemente considerato una superfieie associate ad una successione di Laplace chiusa da uno lato presentante il caso di Laplace e dell'altro lato presentante il caso di Goursat [1]. Vogliamo in qnesta nota considerare una superficie associate ad una successione di Laplace chiusa nei due lati presentante il caso di Laplace.

1. — Consideriamo una superficie (x), non rigata, riferita alle sue asintotiche u, v. Come si sa, le coordinate normale di Wilczynski del punto x soddisfano al sistema di equazioni alle derivate parziali completamente integrabile [2].

$$x^{20} + 2b\, x^{01} + c_1\, x = 0,$$

$$x^{02} + 2a\, x^{10} + c_2\, x = 0.$$

Diciamo U, V i punti della iperquadrica Q di Klein, di S_5, che rappresentano la tangente alle asintotiche u, v in un punto x di (x). Si ha

$$U^{10} + 2b\, V = 0, \qquad V^{01} + 2a\, U = 0,$$

[1] *Quelques propriétes d'une surface associées à une suite de Laplace terminée* (Annali di Matematica, 1961; (IV), t. LIII, pp. 9-20). Vedere anche *Sulle superficie associate ad una succesxione di Laplace chiusa* (Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, 1960, pp. 159-161).

[2] Utilizziamo le notazioni del nostro opuscolo *La Théorie des surfaces et l'espace réglé*. Actualités scient., N° 138 (Paris, Hermann, 1934). Scriviamo φ^{ik} in vece di $\dfrac{\partial^{i+k}\varphi}{\partial u^i\,\partial v^k}$.

ed i punti U, V appartengono ad una successione di Laplace

$$\text{(L)} \qquad \ldots, U_m, \ldots, U_1, U, V, V_1, \ldots, V_m, \ldots$$

dove si ha

$$U_m = U_{m-1}^{0.1} - U_{m-1}(\log.\, bh_1 \ldots h_{m-1})^{01},$$

$$V_m = V_{m-1}^{10} - V_{m-1}(\log.\, ak_1 \ldots, k_{m-1})^{10},$$

$$h_m = -(\log.\, bh_1 \ldots h_{m-1})^{11} + h_{m-1},$$

$$k_m = -(\log ak_1 \ldots k_{m-1})^{11} + k_{m-1}.$$

Supponiamo che questa successione di Laplace si chiude nei punti U_n, V_n presentante il caso di Laplace. Abbiamo dunque

$$h_n = 0, \; k_n = 0$$

ed U_n dipende da v solo et V_n da u solo.

La successione L è coniugata rispetto alla iperquadrica Q. Precisamente, il punto U_m è il polo del iperpiano $V_{m-2}\, V_{m-1}\, V_m\, V_{m+1}\, V_{m+2}$ ed il punto V_m, il polo del iperpiano $U_{m-2}\, U_{m-1}\, U_m\, U_{m+1}\, U_{m+2}$. Adesso, il punto U_n è il polo del iperpiano $V_{n-2}\, V_{n-1}\, V_n\, V_n^{10}\, V_n^{20}$ ed il punto V_n, il polo del iperpiano $U_{n-2}\, U_{n-1}\, U_n\, U_n^{01}\, U_n^{02}$.

La condizione perchè due punti siano coniugati rispetto alla Q sarà scritta

$$\Omega(p, q) = 0.$$

L'equazione della iperquadrica Q sarà $\Omega(p, p) = 0$.

2. — Da $\Omega(U_n, V_n) = 0$ si trae subito

$$\Omega(U_n^{01}, V_n) = 0, \Omega(U_n^{02}, V_n) = 0, \Omega(U_n, V_n^{10}) = 0, \Omega(U_n, V_n^{20}) = 0,$$

$$\Omega(U_n^{01}, V_n^{10}) = 0, \Omega(U_n^{02}, V_n^{01}) = 0,$$

$$\Omega(U_n^{01}, V_n^{20}) = 0, \Omega(U_n^{02}, V_n^{20}) = 0.$$

I piani $\xi = U_n\, U_n^{01}\, U_n^{02}$ e $\eta = V_n\, V_n^{10}\, V_n^{20}$ sono coniugati rispetto a Q. Quando varia u, il primo di questi piani è fisso, dunque anche il secondo e vediamo che la curva (V_n) appartiene a questo secondo piano η. Nello stesso modo, si vede che la curva (U_n) appartiene al piano ξ, anche fisso quando varia v.

Come l'abbiamo ricordato, il punto V_n è il polo dell'iperpiano $U_{n-2} \dots U_n^{20}$, cioè del iperpiano osculatore nel punto U_{n-2} ad una curva v tracciata sulla superficie (U_{n-2}). Quando varia v, il punto V_n e l'iperpiano coniugato sono fissi. Quindi, le curve v tracciate sulla snperficie (U_{n-2}) appartengono ad iperpiani. Questi iperpiani passano per il piano ξ.

La retta $V_n \, V_n^{10}$ è coniugato allo spazto a tre dimensioni $U_{n-1} \, U_n \, U_n^{21} \, U_n^{02}$ osculatore ad una curva v nel punto U_{n-1} della superficie (U_{n-1}). Quando varia v, la retta $V_n \, V_n^{10}$ e lo spazio coniugate sono fissi e dunque le curve v tracciate sulla superficie (U_{n-1}) appartengono a spazi a tre dimensioni passante per il piano ξ.

Nello stesso modo, si vede che le curve u tracciate sulla superficie (V_{n-2}) appartengono ad iperpiani e le curve u sulla superficie (V_{n-1}) appartengono a spazi a tre dimensioni, questi iperpiani et spazi passante per il piano η.

3. — Diciamo G uno dei punti di incontro della retta $U_n \, V_n$ colla iperquadrica Q.

Sulla superficie (G), le curve u sono tagliate dei coni proiettante la curva (V_n) dei punti della curva (U_n) e le curve v des coni proiettante la curva (U_n) dei punti della curva (V_n).

La tangente ad una curva v nel punto G appartiene al piano tangente al cono proiettante la curva (U_n) da un punto V_n, dunque appartiene al piano $V_n \, U_n \, U_n^{01}$. Questa tangente incontra dunque la retta $U_n \, U_n^{01}$ in un punto G_1.

La tangente ad una curva u nel punto G incontra la retta $V_n \, V_n^{10}$ in un punto G_{-1}.

L'iperpiano coniugate di G_1 passa per il punto G, per il piano η dunque per il punto U_n ed infine per lo spazio a tre dimensioni coniugate di $U_n \, U_n^{01}$, cioè per una curva u di (V_{n-1}). Quando varia u, questo iperpiano è fisso, quindi anche il punto G_1.

Nello stesso modo, si vede che il punto G_{-1} è fisso quando varia v. Scriviamo

$$G = \lambda \, U_n + \mu \, V_n .$$

Si ha

$$G^{01} = \lambda^{01} \, U_n + \mu^{01} \, V_n + \lambda \, U_n^{01} .$$

Rappresentiamo con

$$\xi_0 \, V_n + \eta_0 \, U_n + \eta_1 \, U_n^{01}$$

un punto del piano $V_n\, U_n\, U_n^{01}$. L'equazione della retta GG_1 è

$$\begin{vmatrix} \xi_0 & \eta_0 & \eta_1 \\ \mu & \lambda & 0 \\ \mu^{01} & \lambda^{01} & \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Il punto G_1 è dunque dato da

$$(\mu\, \lambda^{01} - \lambda\, \mu^{01})\, U_n + \lambda\mu\, U_n^{01}.$$

Possiamo avere un'altra espressione di G_1. Abbiamo

$$\Omega\,(G,\, V_n) = \mu\, \Omega\,(V_n\,,\, V_n),$$

$$\Omega\,(G^{01},\, V_n) = \mu^{01}\, \Omega\,(V_n\,,\; V_n)$$

e quindi

$$\Omega\,(\mu^{01}\, G - \mu\, G^{01},\, V_n) = 0.$$

L'iperpiano coniugato di V_n contienne la retta $U_n\, U_n^{01}$ e taglia la retta GG_1 nel punto G_1. Possiamo dunque scrivere

$$G_1 = \mu^{01}\, G - \mu\, G^{01}.$$

Nello stesso modo, abbiamo

$$G_{-1} = \lambda^{10}\, G - \lambda\, G^{10}.$$

Come abbiamo $G_1^{10} = 0$, $G_{-1}^{01} = 0$, si ha

$$\mu\, G^{11} - \mu^{01}\, G^{10} + \mu^{10}\, G^{01} = \mu^{11}\, G = 0,$$

$$\lambda\, G^{11} + \lambda^{01}\, G^{10} - \lambda^{10}\, G^{01} - \lambda^{11}\, G = 0.$$

Dunque si ha

$$\frac{\mu}{\lambda} = -\,\frac{\mu^{01}}{\lambda^{01}} = -\,\frac{\mu^{10}}{\lambda^{10}} = \frac{\mu^{11}}{\lambda^{11}}.$$

Se ne trae

$$(\log \lambda\cdot\mu)^{10} = 0,\ (\log \lambda\, \mu)^{01} = 0,\ \lambda\, \mu = \theta = C^{te},$$

ed infine

$$\mu\mu^{11} - \mu^{10}\, \mu^{01} = 0,\ (\log \mu)^{11} = 0,\ \mu = \varphi_1\,(u)\, \varphi_2\,(v).$$

Possiamo fare una sostituzione sulla variabile u ed una altra sulla variabile v per avere $\varphi_1(u) = 1$, $\varphi_2(v) = 1$. Dunque $\mu = 1$, $\lambda = \theta$,

$$G = \theta\, U_n + V_n \,.$$

Il punto G soddisfa ad una equazione

$$G^{11} = 0,\ G^{10} = V_n^{10} = G_{-1}\,,\ G^{01} = \theta\, U_n^{01} = \theta\, G_1\,,$$

e quindi descrive una rete coniugata. La retta g di cui G è l'immagine genera una congruenza W.

4. — La retta $U_n\, V_n$ taglia Q in due punti G_1, G_2 e possiamo scrivere

$$G_1 = \theta\, U_n + V_n\,,\quad G_2 = \theta\, U_n - V_n\,.$$

poi

$$G_1^{01} = G_2^{01} = \theta\, U_n^{01}\,,\quad G_1^{10} = -\, G_2^{10} = V_n^{10}\,.$$

Diciamo γ_ξ e γ_μ le sezioni di Q per i piani ξ e η. Essendo questi piani coniugati rispetto à a Q, le coniche γ_ξ, γ_η rappresentano i due sistemi di rette di nna quadrica Φ.

Consideriamo uno spazio a tre dimensioni $U_n\,\eta$. La retta coniugata di questo spazio rispetto a Q si trova nel piano ξ e nel iperpiano polare di U_n. Questo taglia γ_ξ in due punti R_1, R_2. Diciamo r_1, r_2 le rette di Φ rappresentate da R_1, R_2. Le rette della congruenze Σ_1 di direttrice r_1, r_2 sono rappresentate dei punti di Q appartenente allo spazio $U_n\,\eta$. Questo spazio taglia sulle superficie (G_1), (G_2) curve u ed a queste curve corrispondono rigate R_u, R'_u delle congruenze Σ_1.

La considerazione di uno spazio $V_n\,\xi$ conduca a due rigate R_v, R'_v di una congruenze lineare Σ_2 di cui le direttrice s_1, s_2 appartengono alla quadrica Φ, e sono generatrice del secondo modo. Le rette s_1, s_2 sono rappresentate sulla Q dei punti di contatto della tangente alla conica γ_η passante per V_n.

Diciamo g_1, g_2 le rette di cui le immagine sopra Q sono G_1, G_2.

La retta g_1 appartiene ad una rigata R_u ed a una rigata R_v, dunque questa retta è appoggiata sulle rette r_1, r_2 e sulle rette s_1, s_2. La retta g_1 è dunque una diagonale del quadrilatero sghembo di cui gli spigoli sono le rette r_1, r_2, s_1, s_2. La retta g_2 è l'altra diagonale di questo quadrilatero.

Abbiamo dunque una congruenze (g) costruita così:

Sulla quadrica Φ abbiamo ∞^1 coppie de rette r e ∞^1 coppie di rette s del altro modo. Le rette di due coppie (r_1, r_2), (s_1, s_2) sono gli spigoli di un quadrilatero sghembo di cui le diagonali sono le rette della congruenza.

5. — Diciamo H_1, H_2 i punti di incontro della retta $U_n^{01} V_n^{10}$ coll'iperquadrica Q. Le rette $G_1 H_1$, $G_1 H_2$ appartengono a Q e rappresentano i fasci focali della congruenza (g_1). Le rette $G_2 H_1$, $G_2 H_2$ rappresentano i fasci focali della congruenza (g_2).

Consideriamo lo spazio a tre dimensioni $U_n^{01} \eta$. La retta coniugata di questo spazio si trova nel piano ξ e taglia γ_ξ in due punti $\overline{R}_1, \overline{R}_2$. La retta coniugata dello spazio V_n^{10} si trova nel piano η e taglia γ_η in due punti $\overline{S}_1, \overline{S}_2$. Le rette $\overline{r}_1, \overline{r}_2, \overline{s}_1, \overline{s}_2$ rappresentate da questi punti appartengono a Φ e sono i spigoli di un quadrilatero sghembo di cui le diagonali h_1, h_2 sono rappresentate dei punti H_1, H_2. *Le rette h_1, h_2 tagliano le rette g_1, g_2 nei fuochi di queste ultime rette.*