Sonderabdruck aus
ARCHIV DER MATHEMATIK
Vol. XI, 1960 BIRKHÄUSER VERLAG, BASEL UND STUTTGART Fasc. 1

Sur les suites de Laplace et sur les congruences *W*

Par Lucien Godeaux à Liége

Sur les suites de Laplace et sur les congruences W

Par Lucien Godeaux à Liége

Dans cette note, nous considérons une forme de la condition pour qu'un réseau soit conjugué à une congruence donnée dans un espace projectif quelconque. Nous démontrons ensuite qu'une congruence W dont (x) est une surface focale, étant donnée, il existe une infinité de congruences W ayant également (x) comme surface focale et dont les complexes linéaires osculateurs sont en involution avec celui de la congruence donnée[1]).

1. On considère, dans un espace projectif S_r à r dimensions, une suite de Laplace

$$\text{(L)} \qquad \ldots, U_n, \ldots, U_1, U, V, V_1, \ldots, V_n, \ldots$$

dont les points dépendent de deux paramètres u, v et où chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u. On suppose[2])

$$U^{10} + 2b\,V = 0, \quad V^{01} + 2a\,U = 0, \tag{1}$$

a et b étant des fonctions de u, v dont aucune n'est identiquement nulle.

Considérons un point $J = \lambda U - \mu V$ de la droite UV et cherchons dans quelles conditions ce point décrit un réseau conjugué à la congruence (UV). Nous allons montrer que l'on peut disposer du facteur de proportionnalité de λ, μ pour avoir

$$\mu^{10} + 2b\lambda = 0, \quad \lambda^{01} + 2a\mu = 0. \tag{2}$$

On a

$$J^{11} - J^{10}(\log\mu)^{01} - J^{01}(\log\lambda)^{10} + J[(\log\lambda)^{10}(\log\mu)^{01} - 4ab] =$$
$$= U\left[\lambda(\log\lambda)^{11} + 2a\mu\left(\log\frac{a\mu}{\lambda}\right)^{10}\right] - V\left[\mu(\log\mu)^{11} + 2b\lambda\left(\log\frac{b\lambda}{\mu}\right)^{01}\right].$$

Pour notre objet, il faut que le second membre représente le point J, c'est-à-dire que l'on ait

$$(\log\lambda)^{11} + 2\left(\frac{a\mu}{\lambda}\right)^{10} = (\log\mu)^{11} + 2\left(\frac{b\lambda}{\mu}\right)^{01},$$

ou encore

$$\left(\frac{\lambda^{01} + 2a\mu}{\lambda}\right)^{10} = \left(\frac{\mu^{10} + 2b\lambda}{\mu}\right)^{01}. \tag{3}$$

[1]) Nous supposons connu notre exposé sur «La Théorie des surfaces et l'espace réglé». Actualités scient., No. 138, Paris, Hermann 1934.

[2]) Pour une raison de simplicité typographique, nous écrivons φ^{ik} au lieu de

$$\frac{\partial^{i+k}\varphi}{\partial u^i\,\partial v^k}.$$

Observons que si l'on remplace λ, μ par $\lambda, \varrho\,\mu$, la relation (3) n'est pas modifiée. De la relation (3), on déduit qu'il existe une fonction $\varphi(u,v)$ telle que

$$\varphi^{01} = \frac{\lambda^{01} + 2a\mu}{\lambda}, \quad \varphi^{10} = \frac{\mu^{10} + 2b\lambda}{\mu}.$$

Posons alors $\lambda = e^{-\varphi}$. On a

$$(e^{-\varphi}\lambda)^{01} + 2a e^{-\varphi}\mu = 0, \quad (e^{-\varphi}\mu)^{10} + 2b e^{-\varphi}\lambda = 0 .$$

En posant $\lambda_1 = e^{-\varphi}\lambda$, $\mu_1 = e^{-\varphi}\mu$, nous aurons donc

$$\mu_1{}^{10} + 2b\lambda_1 = 0, \quad \lambda_1{}^{01} + 2a\mu_1 = 0,$$

c'est-à-dire, en changeant de notation, les relations (2).

Pour $r = 3$, ces relations avaient été obtenues par DEMOULIN.

2. Le point J appartient à une suite de Laplace

$$\text{(J)} \qquad \ldots, J_n, \ldots, J_1, J, J_{-1}, \ldots, J_{-n}, \ldots$$

inscrite dans la suite L. Précisément, le point J_n appartient à la droite $U_{n-1}U_n$ et le point J_{-n} à la droite $V_{n-1}V_n$.

L'analogie des équations (1) et (2) permet l'interprétation géométrique suivante:

Imaginons un espace projectif S_{r+1} à $r+1$ dimensions contenant l'espace S_r et soit O un point de S_{r+1} n'appartenant pas à S_r.

Sur la droite OU, prenons un point U' dont les $r+1$ premières coordonnées homogènes sont celles de U et la $(r+2)$-ième, μ. De même, sur la droite OV prenons un point V' dont les premières coordonnées sont celles de V et la dernière λ. En vertu des relations (1) et (2), les points U', V' sont transformés de Laplace l'un de l'autre. Ils appartiennent à une suite de Laplace

$$\text{(L')} \qquad \ldots, U'_n, \ldots, U'_1, U', V', V'_1, \ldots, V'_n, \ldots$$

dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u.

La suite L est la projection de la suite L' à partir du point O sur S_r et la suite J s'obtient en prenant les intersections des droites $U_{n-1}U_n, U'_{n-1}U'_n$ et des droites $V_{n-1}V_n, V'_{n-1}V'_n$. Le point J est l'intersection des droites UV et $U'V'$.

3. Supposons $r = 5$ et que la suite L soit attachée à une surface (x) de l'espace ordinaire S_3 rapportée à ses asymptotiques u, v.

Les coordonnées normales de WILCZYNSKI du point x de (x) satisfont au systèmes d'équations aux dérivées partielles complètement intégrable

$$x^{20} + 2b x^{01} + c_1 x = 0,$$
$$x^{02} + 2a x^{10} + c_2 x = 0,$$

a, b, c_1, c_2 étant des fonctions de u, v.

Sur l'hyperquadrique Q de KLEIN de S_5 les points U, V représentent les tangentes au point x aux asymptotiques u, v de la surface (x).

Le point J représente une droite j, tangente en x à la surface (x), engendrant une congruence W dont nos désignerons par $(\bar{x})$ la seconde surface focale.

Soient $\bar{U}, \bar{V}$ les points de Q qui représentent les tangentes aux asymptotiques u, v au point $\bar{x}$ de la surface $(\bar{x})$. Nous avons montré que les droites $U\bar{U}$ et $V\bar{V}$ se coupent en un point P seconde image du complexe linéaire osculateur à la congruence (j) le long de la droite j[3]). La première image de ce complexe est l'hyperplan $J_2 J_1 J J_{-1} J_{-2}$.

Nous avons

$$U_1 = U^{01} - U(\log b)^{01}, \qquad V_1 = V^{10} - V(\log a)^{10},$$
$$U_2 = U_1^{01} - U_1(\log b h_1)^{01}, \quad V_2 = V_1^{10} - V_1(\log a k_1)^{10},$$

où

$$h_1 = -(\log b)^{11} + 4ab, \quad k_1 = -(\log a)^{11} + 4ab.$$

Ensuite, nous avons

$$J_1 = \mu U_1 - \mu_1 U, \qquad J_{-1} = \lambda V_1 - \lambda_1 V,$$
$$J_2 = \mu_1 U_2 - \mu_2 U_1, \quad J_{-2} = \lambda_1 V_2 - \lambda_2 V_1,$$

où

$$\mu_1 = \mu^{01} - \mu(\log b)^{01}, \qquad \lambda_1 = \lambda^{10} - \lambda(\log a)^{10},$$
$$\mu_2 = \mu_1^{01} - \mu_1(\log b h_1)^{01}, \quad \lambda_2 = \lambda_1^{10} - \lambda_1(\log a k_1)^{10}.$$

Nous avons montré[4]) que le point P est donné par

$$P = [\mu_2 + \mu_1(\log b h_1)^{01} + \beta\mu]\, U - [\mu_1 - \mu(\log b h_1)^{01}]\, U_1 + \mu U_2 -$$
$$- [\lambda_2 + \lambda_1(\log a k_1)^{10} + \alpha\lambda]\, V + [\lambda_1 - \lambda(\log a k_1)^{10}]\, V_1 - \lambda V_2,$$

où

$$\alpha = 2(\log a)^{20} + \overline{(\log a)^{10}}^2 + 4(b^{01} + c_1),$$
$$\beta = 2(\log b)^{02} + \overline{(\log b)^{01}}^2 + 4(a^{10} + c_2).$$

Le point P est par définition le pôle de l'hyperplan $J_2 J_1 J J_{-1} J_{-2}$.

4. Proposons-nous de rechercher s'il peut exister sur la droite UV un point I décrivant un réseau conjugué à la congruence (UV) et tel que le plan osculateur à la surface (I) passe par P.

Nous posons

$$I = lU - mV$$

et nous pouvons supposer

$$l^{01} + 2am = 0, \quad m^{10} + 2bl = 0. \tag{4}$$

Nous désignerons par I_1, I_2 les deux premiers transformés de Laplace de I dans le sens des v, par I_{-1}, I_{-2} les transformés dans le sens des u.

---

[3]) «Sulle congruenze W». Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni, série V, vol. XV, 1956.

[4]) «Sulle congruenze W», loc. cit.

En posant

$$(5)\qquad \begin{aligned} m_1 &= m^{01} - m\,(\log b)^{01}, & l_1 &= l^{10} - l\,(\log a)^{10}\,,\\ m_2 &= m_1^{01} - m_1\,(\log b\,h_1)^{01}, & l_2 &= l_1^{10} - l_1\,(\log a\,k_1)^{10}\,, \end{aligned}$$

nous avons

$$\begin{aligned} I_1 &= m\,U_1 - m_1\,U\,, & I_{-1} &= l\,V_1 - l_1\,V\,,\\ I_2 &= m_1\,U_2 - m_2\,U\,, & I_{-2} &= l_1\,V_2 - l_2\,V_1\,. \end{aligned}$$

Pour notre objet, l'hyperplan $I_2\,I_1\,I I_{-1}\,I_{-2}$ doit passer par le point P.

Tout point de l'espace S_5 peut être représenté par

$$\eta_2\,U_2 + \eta_1\,U_1 + \eta_0\,U + \xi_0\,V + \xi_1\,V_1 + \xi_2\,V_2$$

et les η, ξ sont les coordonnées locales de ce point.

L'hyperplan $I_2\,I_1\,I I_{-1}\,I_{-2}$ a pour équation locale

$$m_2\,\eta_2 + m_1\,\eta_1 + m\,\eta_0 + l\,\xi_0 + l_1\,\xi_1 + l_2\,\xi_2 = 0\,.$$

Pour qu'il passe par le point P, on doit avoir

$$\begin{gathered} m_2\,\mu - m_1\,[\mu_1 - \mu\,(\log b\,h_1)^{01}] + m\,[\mu_2 + \mu_1\,(\log b\,h_1)^{01} + \beta\,\mu] - \\ - l_2\,\lambda + l_1\,[\lambda_1 - \lambda\,(\log a\,k_1)^{10}] - l\,[\lambda_2 + \lambda_1\,(\log a\,k_1)^{10} + \alpha\,\lambda] = 0\,, \end{gathered}$$

équation symétrique en l, m et λ, μ.

En utilisant les relations (5), cette équation se ramène à

$$(6)\qquad A_0\,m^{02} + A_1\,m^{01} + A_2\,m + B_0\,l^{20} + B_1\,l^{10} + B_2\,l = 0\,.$$

5. En dérivant trois fois de suite par rapport à v l'équation (6) et en utilisant les relations (4), on obtient trois équations où figurent l^{20}, l^{10}, l. En éliminant ces quantités entre ces équations et (6), on obtient une équation de la forme

$$(7)\qquad A_0'\,m^{05} + A_1'\,m^{04} + A_2'\,m^{03} + A_3'\,m^{02} + A_4'\,m^{01} + A_5'\,m = 0\,.$$

Soit

$$\chi_1\,(u,v),\ \chi_2\,(u,v), \ldots, \chi_5\,(u,v)$$

un système fondamental d'intégrales de l'équation (7), où l'on suppose u constant. L'intégrale générale de cette équation peut s'écrire

$$m = \varphi_1\,(u)\,\chi_1\,(u,v) + \varphi_2\,(u)\,\chi_2\,(u,v) + \cdots + \varphi_5\,(u)\,\chi_5\,(u,v)\,,$$

où $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_5$ sont des fonctions arbitraires de u.

De la seconde des relations (4), on tire

$$2\,b\,l + \sum \varphi'\,\chi + \sum \varphi\,\chi^{10} = 0\,.$$

La première des équations (4) donne ensuite

$$\sum \varphi'\,[\chi\,(\log b)^{01} - \chi^{01}] + \sum \varphi\,[4\,a\,b\,\chi + \chi^{10}\,(\log b)^{01} - \chi^{11}] = 0\,.$$

Nous pouvons choisir arbitrairement quatre des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_5$, la cinquième étant déterminée par l'équation précédente. Chaque solution donnera un point I de la droite $U\,V$ décrivant un réseau conjugué à la congruence $(U\,V)$.

6. Chacune des surfaces (I) trouvées représente une congruence W ayant (x) comme surface focale. Le complexe linéaire osculateur à cette congruence le long de la droite i a pour première image l'hyperplan $I_2 I_1 I I_{-1} I_{-2}$, qui passe par P. Sa seconde image, pôle de cet hyperplan par rapport à Q, appartient à la première image du complexe linéaire osculateur à la congruence (j). Les deux complexes linéaires sont donc en involution.

Etant donnée une congruence W dont (x) est une surface focale, il existe une infinité de congruences W ayant la même surface focale et dont les complexes linéaires osculateurs sont en involution avec le complexe linéaire osculateur à la congruence donnée.

Eingegangen am 9. 10. 1959