Bull. Sc. math., 2e série,
86, 1963, p. 138 à 141.

SUR UN THÉORÈME DE F. ENRIQUES ;

PAR M. LUCIEN GODEAUX.

On sait qu'une involution du second ordre, privée de points unis, appartenant à une surface de genres $p_a = P_4 = 1$, a pour image une surface de genres $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$. F. Enriques a démontré qu'inversement toute surface de genres $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$ peut être obtenue par ce procédé ([1]). La démonstration d'Enriques fait appel à des considérations assez délicates. Nous nous proposons d'exposer ici une démonstration plus simple.

1. Rappelons tout d'abord quelques propriétés des surfaces envisagées.

Une surface de genres $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$ est dépourvue de courbe canonique mais possède une courbe bicanonique d'ordre zéro. Un système linéaire $|C|$ de courbes de genre $\pi > 1$, tracées sur la surface, a le degré $2\pi - 2$ et la dimension $\pi - 1$ (il existe par contre les faisceaux de courbes elliptiques). L'adjoint $|C'|$ à $|C|$ possède les mêmes caractères que $|C|$ et l'on a

$$|2C| = |2C'|.$$

([1]) Enriques a construit la surface au moment où, en 1894, Castelnuovo recherchait les conditions de rationalité $p_a = P_2 = 0$ d'une surface algébrique. Voir ENRIQUES, *Introduzione alla Geometria sopra le superficie algebriche* (*Memorie Soc. Ital. delle Scienze*, 1896, p. 1-81); *Sopra le superficie algebriche di bigenere uno* (*Ibid.* 1906, p. 327-352). Le théorème dont il est question ici a été établi dans une Note : ENRIQUES, *Un'osservazione relativa alle superficie di bigenere* 1 (*Rend. Accad. di Bologna*, 1907-1908, p. 40-45). *Voir* également L. GODEAUX, *Recherches sur les surfaces algébriques de genres zéro et de bigenre* 1 (*Bull. Acad. roy. Belgique*, 1926, p. 726-741 et 892-904; 1927, p. 114-133); *Les surfaces algébriques non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls* (*Act. scient. et industr.*, n° 123, Paris, Hermann, 1934).

La surface peut se ramener, par une transformation birationnelle à une surface du sixième ordre passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre.

Une surface de genres $p_a = P_4 = 1$ possède une courbe canonique et des courbes pluricanoniques d'ordre zéro. Tout système linéaire $|C|$ de courbes de genre π tracées sur la surface, a le degré $2\pi - 2$ et la dimension π; il est son propre adjoint.

2. Considérons une surface F de genres $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$, du sixième ordre, passant doublement par les arêtes du tétraèdre de référence. Elle a pour équation

$$x_1 x_2 x_3 x_4 f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) + \varphi_2(x_2 x_3 x_4, x_3 x_4 x_1, x_4 x_1 x_2, x_1 x_2 x_3) = 0,$$

f_2 et φ_2 étant des polynomes du second degré contenant tous les termes carrés parfaits.

Désignons par C les sections planes de la surface et par C′ leurs adjointes. Le système $|C'|$ est découpé, en dehors des droites doubles, par les surfaces

$$\lambda_1 x_2 x_3 x_4 + \lambda_2 x_3 x_4 x_1 + \lambda_3 x_4 x_1 x_2 + \lambda_4 x_1 x_2 x_3 = 0.$$

Supposons qu'il existe une surface Φ contenant une involution I du second ordre dont F soit une image et telle que les courbes C, C′ aient pour homologues, sur la surface Φ, des courbes d'un même système linéaire $|\Gamma|$. Nous conviendrons de prendre pour modèle projectif de Φ la surface dont les sections hyperplanes sont les courbes Γ.

Si nous désignons par H la transformation birationnelle de Φ en soi qui engendre l'involution I, observons que H opère sur les courbes de $|\Gamma|$ comme une homographie sur les points d'un espace. Il y a dans $|\Gamma|$ deux systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I; l'un, $|\Gamma_0|$, correspond à $|C|$, l'autre, $|\Gamma_1|$, correspond à $|C'|$. Il en résulte, d'après la théorie des homographies, que $|\Gamma|$ a la dimension 7 et que Φ est donc plongée dans un espace linéaire S_7 à sept dimensions. Observons que H échangeant entre elles les courbes Γ et faisant correspondre un faisceau de courbes Γ à un faisceau de courbes Γ, est déterminée sur Φ par une homographie biaxiale de l'espace S_7, que nous désignerons toujours par H.

L'homographie H possède deux axes ponctuels σ_0, σ_1 à trois dimensions, les courbes Γ_0 étant découpées par les hyperplans passant par σ_1 et les courbes Γ_1 par les hyperplans passant par σ_0.

Désignons par $x_1, x_2, \ldots, x_8$ les coordonnées des points de S_7 et supposons que les espaces σ_0, σ_1 aient respectivement pour équations

$$x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = 0; \qquad x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0.$$

Pour obtenir les équations de la surface F, nous devons éliminer x_5, x_6, x_7, x_8 entre les équations de la surface Φ. Cela implique qu'on doit avoir

$$(1) \quad \rho x_5 = x_2 x_3 x_4, \qquad \rho x_6 = x_3 x_4 x_1, \qquad \rho x_7 = x_4 x_1 x_2, \qquad \rho x_8 = x_1 x_2 x_3.$$

L'équation de la surface F donne alors

$$x_1 x_2 x_3 x_4 f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) + \rho^2 \varphi_2(x_5, x_6, x_7, x_8) = 0,$$

d'où

$$\rho^2 = x_1 x_2 x_3 x_4.$$

En combinant deux à deux les équations (1), on trouve

$$(2) \quad \begin{cases} x_5 x_6 = x_3 x_4, & x_5 x_7 = x_2 x_4, & x_5 x_8 = x_2 x_3, \\ x_6 x_7 = x_1 x_4, & x_6 x_8 = x_1 x_3, & x_7 x_8 = x_1 x_2, \end{cases}$$

c'est-à-dire les équations de six hyperquadriques contenant la surface Φ.

Les équations (1) donnent encore

$$(3) \quad x_1 x_5 = x_2 x_6 = x_3 x_7 = x_4 x_8,$$

équations de trois hyperquadriques contenant Φ.

Il en résulte que la surface Φ *existe* et est commune aux hyperquadriques (2), (3) et

$$(4) \quad f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) + \varphi_2(x_5, x_6, x_7, x_8) = 0.$$

Si nous introduisons dans les équations de Φ les équations $x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = 0$ de σ_0, on voit que trois des coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4 doivent être nulles et comme par hypothèse le polynome $f_2 = 0$ contient les termes en x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2 la surface Φ ne rencontre pas σ_0. On vérifie de même qu'elle ne rencontre pas σ_1.

L'homographie H, dont les équations sont

$$H = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & -x_5 & -x_6 & -x_7 & -x_8 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \end{pmatrix}$$

détermine sur Φ une involution du second ordre privée de points unis dont F est l'image.

Observons qu'on peut supposer que φ_2 ne contient que les termes en x_5^2, x_6^2, x_7^2, x_8^2 en utilisant les équations (2), ou d'ailleurs en remarquant que le terme en $x_1 x_2 x_3^2 x_4^2$ par exemple figure deux fois dans l'équation F.

3. Il reste à prouver que la surface Φ est de genres $p_a = P_4 = 1$. A cet effet, il suffira de prouver que sur la surface Φ existe un système linéaire qui est son propre adjoint, ce qui implique que la courbe canonique et les courbes pluricanoniques de la surface sont d'ordre zéro.

Entre une courbe C et la courbe Γ_0 homologue, ou entre une courbe C′ et la courbe Γ_1 homologue, il existe une correspondance (1, 2) privée de points de diramation, donc d'après la formule de Zeuthen, les courbes C, C′ étant de genre 4, les courbes Γ_0, Γ_1 et par suite les courbes Γ sont de genre 7. D'autre part, $|C|$ et $|C'|$ étant de degré 6, $|\Gamma|$ est de degré 12.

Le système $|\Gamma|$ étant de genre 7, de degré 12 et de dimension 7, sur une courbe Γ les autres courbes du système découpent une série linéaire d'ordre 12 et de dimension 6 qui ne peut être que la série canonique de la courbe. Le système $|\Gamma|$ est donc son propre adjoint. La surface Φ est de genres $p_a = P_4 = 1$.

4. Rappelons que la démonstration d'Enriques était la suivante : Passons aux coordonnées cartésiennes en supposant x_1, x_2, x_3, x_4 fonctions linéaires de x, y, z. Enriques démontrait que la surface

$$x_1 x_2 x_3 x_4 f_2 + \varphi_2 = 0, \qquad u^2 = x_1 x_2 x_3 x_4$$

était irréductible et de genres $p_a = P_4 = 1$. Cette surface est la projection sur un espace linéaire à quatre dimensions de la surface Φ à partir d'un plan ne rencontrant pas la surface.