Estratto dal *Bollettino della Unione Matematica Italiana*
Giugno 1956 - Serie III, Anno XI, N. 2 (pagg. 137-140)

Una famiglia di quadriche associata ad una congruenza *W*. (*)

Nota di Lucien Godeaux (a Liegi)

Sunto. - *Si associa ad una congruenza* W *una successione di quadriche di cui due quadriche successive si toccano in quattro punti, caratteristici per queste quadriche.*

1. Ad una congruenza W possiamo associare, nello spazio S_5, quattro successioni di Laplace.

Diciamo (j) una congruenza W, (x), $(\bar{x})$ le sue superficie focali, u, v i parametri delle asintotiche di queste superficie.

Consideriamo la rappresentazione delle rette dello spazio sulla iperquadrica Q di Klein di S_5. La tangente alle asintotiche u, v in un punto x di (x) sono rappresentate da due punti U, V di Q e si sa che questi punti sono trasformati di Laplace l' uno dell' altro (Bompiani, Tzitzeica). Essi appartengono ad una successione di Laplace

$$(L) \qquad \ldots, U_n, \ldots, U_1, U, V, V_1, \ldots, V_n, \ldots$$

di cui un punto è il trasformato del precedente nel senso delle u.

Nello stesso modo alla superficie $(\bar{x})$ è associata una successione di Laplace

$$(\bar{L}) \qquad \ldots, \bar{U}_n, \ldots, \bar{U}_1, \bar{U}, \bar{V}, \bar{V}_1, \ldots, \bar{V}_n, \ldots$$

Notiamo J il punto di Q che rappresenta la retta j. Questo punto è l'intersezione delle rette UV, $\overline{UV}$ e genera una rete coniugata alle congruenze (UV), $(\overline{UV})$. (Darboux). Esiste dunque una successione di Laplace

$$(\mathfrak{J}) \qquad \ldots, J_n, \ldots, J_1, J, J_{-1}, \ldots, J_{-n}, \ldots$$

di cui ogni punto è il trasformato del precedente nel senso delle u. La successione $\mathfrak{J}$ è iscritta nelle successioni L, $\bar{L}$. Precisamente, il punto J_n appartiene alle rette $U_{n-1}U_n$ e $\bar{U}_{n-1}\bar{U}_n$, il punto J_{-n} alle rette $V_{n-1}V_n$, $\bar{V}_{n-1}V_n$.

Diciamo P la seconda imagine nel S_5 del complesso lineare osculatore alla congruenza (j) cioè il polo rispetto a Q dell' iperpiano $J_2J_1JJ_{-1}J_{-2}$: il punto P appartiene ad una successione di Laplace

$$(P) \qquad \ldots, P_n, \ldots, P_1, P, P_{-1}, \ldots, P_{-n}, \ldots$$

(*) Conferenza tenuta al Seminario Matematico della Università di Bologna il 16 aprile 1956.

di cui ogni punto è il trasformato del precedente nel senso delle u.

Il punto P è l'intersezione delle rette $U\bar{U}$ e $V\bar{V}$. Si vede agevolamento che il punto P_{-n}, polo del iperpiano $J_{n-2}J_{n-1}J_nJ_{n+1}J_{n+2}$, appartiene alle rette $V_{n-1}\bar{V}_{n-1}$ e $V_n\bar{V}_n$. Il punto P_n, polo del iperpiano $J_{-n-2}J_{-n-1}J_{-n}J_{-n+1}J_{-n+2}$, è l'intersezione delle rette $U_{n-1}\bar{U}_{n-1}$ e $U_n\bar{U}_n$.

2. Si sa che i piani $U_nU_{n+1}U_{n+2}$ e $V_nV_{n+1}V_{n+2}$ sono coniugati rispetto a Q. Quindi le sezioni di Q da questi piani rappresentano le due schiere rigate di una stessa quadrica Φ_n.

Abbiamo così una successione di quadriche Φ, $\Phi_1, \dots, \Phi_n, \dots$ di cui la prima è la quadrica di LIE. Abbiamo dimostrato che due quadriche successive si toccano in quattro punti, caratteristici per le due quadriche.

Nello stesso modo, alla superficie $(\bar{x})$ è associata una successione di quadriche $\bar{\Phi}$, $\bar{\Phi}_1$, $\bar{\Phi}_2, \dots$, essendo le schiere rigate di $\bar{\Phi}_n$ rappresentate dalle sezioni di Q coi piani $\bar{U}_n\bar{U}_{n+1}\bar{U}_{n+2}$, $\bar{V}_n\bar{V}_{n+1}\bar{V}_{n+2}$, coniugati rispetto a Q.

Le quadriche Φ_n, $\bar{\Phi}_n$ hanno in comune quattro rette rappresentate dalle intersezioni di Q colle rette J_nJ_{n+1} e $J_{-n}J_{-n}J_{-n-1}$.

3. Consideriamo adesso i piani $J_nJ_{n+1}J_{n+2}$ e $P_{-n}P_{-n-1}P_{-n-2}$. Essi sono coniugati rispetto a Q. Le sezioni della iperquadrica con questi piani rappresentano le schiere rigate di una quadrica Ψ_n e si ha così una successione di quadriche Ψ_0, Ψ_1, $\Psi_2, \dots$ associate alla congruenza (j).

Nello stesso modo, possiamo considerare le coppie di piani $J_{-n}J_{-n-1}J_{-n-2}$ e $P_nP_{n+1}P_{n+2}$, coniugati rispetto a Q. Abbiamo così in corrispondenza una quadrica Ψ_{-n} e quindi una successione di quadriche Ψ_{-0}, $\Psi_{-1}, \dots, \Psi_{-n}, \dots$ associata alla congruenza (j).

I piani J_1JJ_{-1} e $P_{-1}PP_1$ sono coniugati rispetto a Q ma si vede agevolmente che la quadrica Ψ associata si spezza nei due piani focali della retta j.

Le due quadriche Ψ_{n-1}, Ψ_n si tagliano in quattro rette rappresentate sopra Q dai punti di intersezione di questa iperquadrica colle rette J_nJ_{n+1} e $P_{-n}P_{-n-1}$. Queste quadriche si toccano dunque in quatto punti e come abbiamo dimostrato, questi punti sono caratteristici per le due quadriche.

Alla congruenza (j) è dunque associata una successione di quadriche

$$\dots, \Psi_n, \dots, \Psi_1, \Psi_0, \Psi, \Psi_{-0}, \Psi_{-1}, \dots, \Psi_{-n}, \dots.$$

Due quadriche successive si toccano in quattro punti, caratteristici per le due quadriche.

4. Consideriamo le quadriche Φ_n, $\overline{\Phi}_n$, Ψ_n dove $n > 0$.

I piani $U_n U_{n+1} U_{n+2}$, $\overline{U}_n \overline{U}_{n+1} \overline{U}_{n+2}$, $J_n J_{n+1} J_{n+2}$ hanno in comune la retta $J_{n+1} J_{n+2}$. Questa retta taglia Q in due punti che rappresentano due rette d_1, d_2 comuni alle tre quadriche.

I piani $V_n V_{n+1} V_{n+2}$ e $\overline{V}_n \overline{V}_{n+1} \overline{V}_{n+2}$ hanno in comune la retta $J_{-n-1} J_{-n-2}$, che taglia Q in due punti che rappresentano due rette d_1', d_2' comune alle quadriche Φ_n, $\overline{\Phi}_n$. Il piano $P_{-n} P_{-n-1} P_{-n-2}$ contiene i punti V_n, V_{n+1}, $\overline{V}_n$, $\overline{V}_{n+1}$; quindi i piani $V_n V_{n+1} V_{n+2}$ e $P_{-n} P_{-n-1} P_{-n-2}$ hanno in comune la retta $V_n V_{n+1}$. Notiamo f_1, f_2 le due rette che corrispondono ai punti di intersezione di Q colla retta $V_n V_{n+1}$. Le quadriche Φ_n, Ψ_n hanno in comune le rette f_1, f_2. Nello stesso modo, le quadriche Φ_n, Ψ_n hanno in comune le rette f_1', f_2' rappresentate dalle intersezioni di Q colla retta $\overline{V}_n \overline{V}_{n+1}$.

Si ottengono risultati analoghi per le quadriche Φ_n, $\overline{\Phi}_n$, Ψ_{-n}.

Osserviamo che le quadriche Ψ_n, Ψ_{-n} si tagliano in generale in una quartica gobba.

5. Cerchiamo adesso i punti caratteristici delle quadriche Ψ_0, Ψ_{-0}.

La quadrica Ψ_0 tocca Ψ_1 in quattro punti che sono caratteristici per le due quadriche. Le quattro rette sono rappresentate dalle intersezioni di Q colle rette $J_1 J_2$ e $P_{-1} P_{-2}$.

La retta JJ_1 tocca Q nel punto J e la retta PP_{-1} taglia Q nei punti V, $\overline{V}$. Ne risulta che Ψ_0 tocca le superficie (x), $(\overline{x})$ della retta j. Ognuno di questi punti conta per due punti caratteristici.

Anche la quadrica Ψ_{-0} tocca le superficie (x), $(\overline{x})$ nei fuochi x, $\overline{x}$ di j e ognuno di questi punti conta per due punti caratteristici.

Vogliamo adesso considerare la omografia H prodotto delle polarità rispetto a Ψ_0 e Ψ_{-0}.

Nello spazio S_5, la polarità rispetto a Ψ_0 è rappresentata dalla omografia armonica H_1 di assi JJ_1J_2 e $PP_{-1}P_{-2}$. Quella rispetto a Ψ_{-0} dalla omografia armonica H_2 di assi $JJ_{-1}J_{-2}$ e $PP_{-1}P_{-2}$ contiene i punti V, V_1, $\overline{V}$, $\overline{V}_1$, quindi il punto J_{-1}; il piano PP_1P_2 contiene il punto J_1. Sulla retta $J_1 J_{-1}$, H_1 e H_2 danno la stessa involuzione, dunque tutti i punti di questa retta sono uniti per $H_1 H_2$.

I punti J e P sono uniti per $H_1 H_2$ e tutti i punti della retta JP, che tocca Q in J, sono uniti per $H_1 H_2$. Le rette UV, $\overline{UV}$ sono unite per H_1, H_2. Le involuzioni determinate sopra queste rette hanno un punto unito comune J, quindi la omografia H_1H_2 dà una omografia parabolica di punto unito J.

Ne deduciamo che la omografia H è singolare e ha i punti uniti x e $\bar{x}$. I piani uniti sono i piani focali della retta j. Se noi diciamo G_1, G_2 i punti di intersezione della retta J_1J_{-1} con Q e g_1, g_2 le rette rappresentate da questi punti, queste rette sono unite per H. L'una, g_1, passa per x e l'altra g_2 per $\bar{x}$.

6. Possiamo associare alla retta j, in modo intrinseco, un tetraedro.

Le quadriche Φ, $\bar{\Phi}$ si tagliano nelle rette di un quadrilatero sghembo, quindi il prodotto delle polarità rispetto a queste quadriche è una omografia biassiale; diciamo r_1, r_2 gli assi di questa omografia. Le rette $_1$, g_2 sono unite per questa omografia e quindi si appoggiano sulle rette r_1, r_2.

Il punto m, dove g_1 incontra una seconda volta Φ ed il punto n dove g_2 incontra una seconda volta $\bar{\Phi}$, sono dati da

$$(x, m, g_1r_1, g_1r_2) = -1, \qquad (\bar{x}, n, g_2r_1, g_2r_2) = -1.$$

Un punto dello spazio ha coordinate della forma

$$z_1x + z_2m + z_3n + z_4\bar{x}.$$

rispetto al tetraedro $xmn\bar{x}$, le quadriche Φ, Φ, Ψ_0, Ψ_{-0} hanno per equazioni

$$\begin{gathered}
(L - M)z_1z_2 - LMz_3^2 - z_4^2 + (L + M)z_3z_4 = 0, \\
(L - M)z_3z_4 - LMz_2^2 - z_1^2 + (L + M)z_1z_2 = 0, \\
z_1z_2 + M(z_2^2 - z_3^2) + z_3z_4 = 0, \\
z_3z_4 + L(z_3^2 - z_2^2) - z_1z_2 = 0.
\end{gathered}$$

BIBLIOGRAFIA

L. Godeaux, *Sur quelques familles de quadriques attachées aux points d'une surface*, « Annales de la Société Polonaise de Mathématique », 1928, pp. 213-226; *La théorie des surfaces et l'espace réglé* « Actualites scientifiques », n. 138, Paris, Hermann, 1934); *Alcune osservazioni sulle congruenze W*, « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Torino », 1953-1954, pp. 39-46; *Sur quatre suites de Laplace associées à une cougruence W*, « Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique », 1954, pp. 880-885); *Sur la théorie des congruences W*, Idem., 1954, pp. 1028-1037, 1955, pp. 343-345; *Sulle congruenze W*, « Rendiconti di Matematica », in corso di stampa.