Estratto dal volume XXX (1960)
dei « Rendiconti del Seminario della Facoltà di Scienze dell' Università di Cagliari »

Sulle superficie algebriche normali invarianti in una omografia ciclica

Nota (*) di LUCIEN GODEAUX

SUNTO: *Si dimostra, costruendo un esempio, che è falsa la proposizione del Sig. T. Turri: Ogni superficie algebrica normale invariante in una omografia ciclica, a periodo qualsiasi, è regolare.*

Nelle mie ricerche sulle involuzioni cicliche appartenenti ad una superficie algebrica, ho costruito un modello proiettivo normale della superficie sul quale l'involuzione è generata da una omografia ciclica dello spazio ambiente. Questa costruzione, molto semplice, non fa intervenire i caratteri invarianti della superficie.

In una nota recente [1]) il Sig. TURRI non critica questa costruzione ma afferma che non è applicabile alle superfici irregolari. Piuttosto che di riprendere i ragionamenti del Sig. TURRI, qualche volta abbastanza nuvolosi, crediamo sia meglio costruire un esempio dove la superficie è irregolare. Si vedrà così dove è falso il ragionamento del Sig. TURRI.

1. - Prendiamo le mosse da una curva algebrica C, di genere $\pi > 0$, contenente una involuzione ciclica I, di ordine primo dispari p e di genere π'. Notiamo T la trasformazione birazionale di C in sè stessa generatrice della involuzione e δ il numero dei punti uniti di I. Per la formula di ZEUTHEN, abbiamo

$$2p(\pi' - 1) + (p - 1)\delta = 2(\pi - 1).$$

Consideriamo sulla curva C una serie lineare di ordine n, $|D_1|$, non speciale e quindi di dimensione $n - \pi$. La trasformazione T e le sue potenze fanno corrispondere a $|D_1|$ le serie $|D_2|$, $|D_3|$, ..., $|D_p|$ dello

---

(*) Pervenuta in Redazione il 21-10-1960.

1) TURRI, « *Regolarità* » *delle superficie normali invarianti in un'omografia ciclica* (Rendiconti della Facoltà delle Scienze di Cagliari, 1959, pp. 1-5).

stesso ordine e della stessa dimensione. La serie lineare completa

$$|G| = |D_1 + D_2 + \ldots + D_p|$$

è trasformata in sè stessa da T; il suo ordine è pn e la sua dimensione $pn - \pi$. Possiamo scegliere n così grande che la serie $|G|$ contiene p serie parziali $|G_1|, |G_2|, \ldots, |G_p|$ composte colla involuzione I. Se noi diciamo C' la curva immagine della involuzione I, a queste serie corrispondono sulla C' serie lineari complete $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p$, di ordine n.

La serie lineare $|G|$ appartiene ad un sistema continuo $\{G\}$ composto da ∞^π serie lineari dello stesso ordine e della stessa dimensione che $|G|$. Sia $|G'|$ una serie lineare di $\{G\}$. T fa corrispondere a $|G'|$ una serie lineare $|A|$ dello stesso ordine e della stessa dimensione. Facciamo variare $|G'|$ entro $\{G\}$ con continuità e tendere verso la serie $|G|$ primitiva. La serie lineare $|A|$ varia con continuità sopra C e tende verso $|G|$. Quindi questa serie $|A|$ appartiene al sistema $\{G\}$. Il sistema $\{G\}$ è dunque mutato in sè stesso della trasformazione T.

Supponiamo che ognuno dei sistemi lineari di $\{G\}$ sia mutato in sè da T. Allora, sulla curva C', le serie $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p$ generano sistemi continui (distinti o non) ∞^π. Questo è assurdo perchè sulla curva C', di genere $\pi' < \pi$, le serie lineari di un ordine dato appartengono a uno (o più) sistemi continui di dimensione π'. Dunque, le serie lineari di $\{G\}$ non sono in generale mutate in sè da T.

Diciamo V_π la varietà di JACOBI associata alla curva C. I punti di V_π rappresentano le serie lineari di $\{G\}$. Sulla varietà V_π, si ha una congruenza lineare $\infty^{\pi-\pi'}$ di varietà V' di dimensione π'. Ognuna di queste varietà V' è birazionalmente equivalente alla varietà di JACOBI della curva C'.

2. - Consideriamo la superficie F rappresentante le coppie di punti non ordinati della curva C[2]. Si sa che questa superficie ha l'irregolarità π.

Un punto P_1 di F è l'immagine di due punti P_1', P_1'' di C. A questi punti, T fa corrispondere due punti P_2', P_2'' che hanno per immagine un

---

2) Questa superficie è stata studiata da MARONI, *Sulle superficie algebriche possedenti due fasci di curve algebriche unisecanti* (Atti di Torino, 1903); DE FRANCHIS, *Sulle varietà ∞^2 delle coppie di punti di due curve o di una curva algebrica* (Rendiconti di Palermo, 1903); SEVERI, *Sulle superficie che rappresentano le coppie di punti di una curva algebrica* (Atti di Torino, 1903); *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e sopra certe classi di superficie* (Memorie di Torino, 1903).

punto P_2 di F. Il punto P_2 è completamente determinato dal punto P_1 e viceversa P_1 è completamente determinato da P_2 poichè P_1', P_1'' corrispondono a P_2', P_2'' nella T^{-1}. Abbiamo dunque sulla superficie F una trasformazione birazionale T' della superficie in sè stessa. Questa trasformazione ha il periodo p e genera una involuzione I' di ordine p.

Si sa che le coppie di punti di C aventi in comune un punto fisso sono rappresentate sopra F dai punti di una curva H. Questa curva genera un sistema continuo, $\{ H \}$, di indice due e di grado uno. Questo sistema ha per inviluppo una curva K che rappresenta le coppie di punti coincidenti.

La involuzione I' possiede un numero finito di punti uniti, essendo p maggiore di due. Questi punti sono i δ punti di K corrispondenti ai punti uniti di T ed i punti rappresentanti le coppie di punti uniti distinti di T.

3. - Consideriamo una delle serie lineari $| G_1 |$ di $\{ G \}$. Agli np punti di un gruppo di $| G_1 |$ corrispondono pn curve del sistema $\{ H \}$, sia $H_1, H_2, \ldots, H_{pn}$. La curva

$$L \equiv H_1 + H_2 + \ldots + H_{np}$$

varia in un sistema lineare $| L |$ che, completato, ha la dimensione [3])

$$r = \frac{1}{2}(pn - \pi)(pn - \pi + 3).$$

Con questa costruzione, ad ogni serie lineare $| G |$ di $\{ G \}$ corrisponde un sistema lineare $| L |$ ed uno solo. Quando varia la serie $| G |$ in $\{ G \}$, il sistema lineare $| L |$ varia in un sistema continuo $\{ L \}$ di dimensione π. Questi sistemi lineari sono rappresentati dai punti della varietà di JACOBI V_π.

Se una serie $| G |$ è trasformante in sè stessa da T, il sistema $| L |$ corrispondente è trasformato in sè stesso da T'. Il sistema $| L |$ corrispondente ad una serie $| G |$ non trasformata in sè stessa da T, è trasformato da T' in un altro sistema di $\{ L \}$.

---

[3]) SEVERI, *Sulle corrispondenze* ... (loc. cit.), n. 20.

Abbiamo dunque costruito sopra F un sistema continuo $\{ L \}$, composto da ∞^{π} sistemi lineari $| L |$, tale che

1°) Il sistema continuo $\{ L \}$ è mutato in sè stesso da T';

2°) Esistono in $\{ L \}$ sistemi lineari trasformati in sè stessi da T';

3°) Esistono in $\{ L \}$ sistemi lineari *non* trasformati in sè da T'.

Si vede così che l'affermazione del Sig. TURRI al principio del n. 4 della sua nota non vale.

4. - Il numero n può essere scelto grande a piacere e quindi r è grande a piacere. Possiamo dunque supporre che i sistemi lineari $| L |$ sono semplici.

Consideriamo un sistema $| L |$ mutato in sè da T' e rapportiamo priettivamente le sue curve agli iperpiani di uno spazio S_r. Alla superficie F corrisponde una superficie F' ed alla trasformazione T' una trasformazione T'' che muta fra loro le sezioni iperpiane di F'. Questa trasformazione è dunque una omografia ciclica di periodo p di S_r.

Questo esempio mostra che la proposizione del Sig. TURRI di cui sopra, è falsa.

Liegi, li 15 ottobre 1960.

Tip. AZZOGUIDI - Via Emilia Ponente, 421 b - Bologna