Remarque sur les couples de congruences W ayant une nappe focale commune

par LUCIEN GODEAUX
Membre de la Société

Résumé — Exposé d'une méthode pour obtenir les propriétés d'une suite de Laplace, déjà considérée par l'auteur, associée à deux congruences W ayant une nappe focale commune.

Dans un travail antérieur, nous avons considéré la configuration formée par deux congruences W ayant une nappe focale commune et introduit une suite de quadriques associée à ces congruences (1). Nous utilisions, comme dans d'autres recherches, la représentation des nappes focales des congruences sur l'hyperquadrique de Klein (2). Dans cette note, nous utilisons une nouvelle méthode pour obtenir nos résultats, méthode basée sur l'emploi d'un espace linéaire à sept dimensions auxiliaire.

Dans les développements qui vont suivre, nous supposons, pour plus de simplicité, que les suites de Laplace rencontrées sont illimitées dans les deux sens.

1. Considérons une surface (x) rapportée à ses asymptotiques u, v. Les coordonnées normales de Wilczynski du point x

(1) *Sur la transformation de Guichard et sur certaines quadriques considérées par M. Demoulin* (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 1939, pp. 953-958). Voir également une note *Sur certaines suites de Laplace associées à une suite de Laplace donnée* (Idem, 1930, pp. 264-273). On pourra aussi consulter le texte de deux conférences que nous avons faites en avril dernier à l'Institut Mathématique de l'Université de Messine : *Congruenze* W *e trasformazioni di Guichard* (Rendiconti del Seminario Matematico di Messina, en cours d'impression.)

(2) *La théorie des surfaces et l'espace réglé.* Actualités scientifiques, nº 138 (Paris, Hermann, 1934).

satisfont à un système d'équations complètement intégrable

$$x^{20} + 2bx^{01} + c_1 x = 0\,,$$

$$x^{02} + 2ax^{10} + c_2 x = 0\,,$$

où a, b, c_1, c_2 sont des fonctions de u, v.

Aux tangentes asymptotiques xx^{10}, xx^{01} au point x de la surface (x) correspondent sur l'hyperquadrique Q de Klein de S_5 des points U, V tels que

$$U^{10} + 2bV = 0\,, \qquad V^{01} + 2aU = 0 \tag{1}$$

et qui sont donc transformés de Laplace l'un de l'autre

Soit

$$\ldots,\ U_n,\ \ldots,\ U_1,\ U,\ V,\ V_1,\ \ldots,\ V_n,\ \ldots \tag{L}$$

la suite de Laplace déterminée par ces deux points, chaque point de cette suite L étant le transformé du précédent dans le sens des u.

Soient (j), (j') deux congruences W ayant (x) comme surface focale. Les droites j, j' sont représentées sur Q par deux points J, J$'$ de la droite UV et on a

$$J = \lambda U - \mu V\,, \qquad J' = \lambda' U - \mu' V\,.$$

Demoulin a montré que l'on peut choisir le facteur de proportionnalité de λ, μ et de λ' μ', de manière à avoir

$$\lambda^{01} + 2a\mu = 0\,, \qquad \mu^{10} + 2b\lambda = 0\,,$$

$$\lambda'^{01} + 2a\mu' = 0\,, \qquad \mu'^{10} + 2b\lambda' = 0\,.$$

2. Considérons un espace linéaire S_7 à sept dimensions contenant S_5. Nous prendrons comme coordonnées projectives des points de S_7 les nombres X_0, X_0', X_{12}, X_{13}, $\ldots$, X_{34} tels que l'espace S_5 soit donné par $X_0 = 0$, $X_0' = 0$ et que les sommets de la pyramide de référence situés dans S_5 soient les mêmes que ceux qui fixent les coordonnées des points de S_5, le point unitaire étant le même.

Cela étant, considérons le point U$'$ dont les coordonnées sont μ, μ' et celles du point U, et le point V$'$, dont les coordonnées sont λ, λ' et celles du point V. Les points U$'$ et V$'$ satisfont aux relations (1) et sont par suite consécutifs dans une suite de Laplace, L′ que nous écrirons

$$\ldots, U_n', \ldots, U_1', U', V', V_1', \ldots, V_n', \ldots. \qquad (L')$$

Les coordonnées du point U_n' sont μ_n, μ_n' et les coordonnées de U_n; celles de V'_n sont λ_n, λ_u' et les coordonnées de V_n.

Fixons l'attention sur les plans déterminés par trois points consécutifs de la suite L′, par exemple sur le plan $U'_{n+1} U_n' U'_{n+1}$. Les coordonnées d'un point de ce plan sont de la forme

$$\eta_{n+1}\mu_{n+1} + \eta_n \mu_n + \eta_{n-1}\mu_{n-1}, \quad \eta_{n+1}\mu'_{n+1} + \eta_u \mu'_n + \eta_{n-1}\mu'_{n-1},$$
$$\eta_{n+1} U_{n+1} + \eta_n U_n + \eta_{n-1} U_{n-1}.$$

Ce plan rencontre l'espace S_5 en un point A_n donné par

$$A_n = \begin{vmatrix} U_{n+1} & U_n & U_{n-1} \\ \mu_{n+1} & \mu_n & \mu_{n-1} \\ \mu'_{n+1} & \mu'_n & \mu'_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Nous désignerons par B_n l'intersection du plan $V'_{n+1} V'_n V'_{n-1}$ avec S_5 et nous aurons

$$B_n = \begin{vmatrix} V_{n+1} & V_n & V_{n-1} \\ \lambda_{n+1} & \lambda_n & \lambda_{n-1} \\ \lambda'_{n+1} & \lambda'_n & \lambda'_{n-1} \end{vmatrix}.$$

En particulier, nous aurons

$$A = \begin{vmatrix} U_1 & U & V \\ \mu_1 & \mu & \lambda \\ \mu'_1 & \mu' & \lambda' \end{vmatrix}, \qquad B = \begin{vmatrix} V_1 & V & U \\ \lambda_1 & \lambda & \mu \\ \lambda'_1 & \lambda' & \mu' \end{vmatrix}.$$

3. Les points A_n, B_n appartiennent à une suite de Laplace

$$\ldots, A_n, \ldots, A_1, A, B, B_1, \ldots, B_n, \ldots,$$

dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens des *u*, que nous avons introduite différemment dans nos travaux antérieurs.

On sait que les points J, J′ appartiennent à des suites de Laplace

$$\ldots, J_n, \ldots, J_1, J, J_{-1}, \ldots, J_{-n}, \ldots, \qquad (J)$$
$$\ldots, J'_n, \ldots, J'_1, J', J'_{-1}, \ldots, J'_{-n}, \ldots, \qquad (J')$$

inscrites dans la suite L. On a, par exemple,

$$J_n = \mu_{n-1}\,U_n - \mu_n\,U_{n-1}\,,\quad J_{-n} = \lambda_{n-1}\,V_n - \lambda_n\,V_{n-1}\,,$$
$$J'_n = \mu'_{n-1}\,U_n - \mu'_n\,U_{n-1}\,,\quad J'_{-n} = \lambda'_{n-1}\,V_n - \lambda'_n\,V_{n-1}\,.$$

Le point A_n est l'intersection des droites $J_n\,J_{n+1}$ et $J'_n\,J'_{n+1}$, le point B_n celles des droites $J_{-n}\,J_{-n-1}$, $J'_{-u}\,J'_{-n-1}$.

4. Les relations entre les points A_n, B_n se calculent aisément. On a

$$[A^{10} - A\,(\log a)^{10}]\,|\,\mu\,\lambda\,| - A\,|\,\mu\,\lambda_1\,| + |\,\mu_1\,\mu\,|\,B = 0\,,$$
$$[B^{01} - B\,(\log b)^{01}]\,|\,\lambda\,\mu\,| - B\,|\,\lambda\,\mu_1\,| + |\,\lambda_1\,\lambda\,|\,A = 0\,,$$

où nous écrivons $|\mu\ \lambda|$, ... au lieu de

$$\begin{vmatrix} \mu & \lambda \\ \mu' & \lambda' \end{vmatrix}, \ \dots\ .$$

On obtient de même

$$[A_n^{01} - A_n(\log b^3\,h^3{}_1\,\dots\,h^3_{n-1}\,h^2_n\,h_{n+1})^{01}]\,|\,\mu_{n+1}\,\mu_n| - A_n\,|\,\mu_{n+2}\,\mu_n\,|$$
$$= |\,\mu_n\,\mu_{n-1}\,|\,A_{n+1}\,,$$
$$A_n^{10}\,|\,\mu_n\,\mu_{n-1}\,| - k_{n-1}\,A_n\,|\,\mu_n\,\mu_{n-2}\,| = |\,\mu_{n+1}\,\mu_n\,|\,A_{n-1}\,h_{n-1},$$
$$[B_n^{10} - B_n\,(\log a^3\,k^3{}_1\,\dots\,k^3_{n-1}\,k^2_n\,k_{n+1})^{10}]\,|\,\lambda_{n+1}\,\lambda_n\,| - B_n\,|\,\lambda_{n+2}\,\lambda_n\,|$$
$$= |\,\lambda_n\,\lambda_{n-1}\,|\,B_{n+1}\,,$$
$$B_n^{01}\,|\,\lambda_n\,\lambda_{n-1}\,| - k_{n-1}\,B_n\,|\,\lambda_n\,\lambda_{n-2}\,| = |\,\lambda_{n+1}\,\lambda_n\,|\,B_{n-1}\,k_{n-1}\,.$$

5. Dans nos travaux antérieurs, nous avons considéré, dans l'espace S_3 contenant la surface (x), la quadrique Δ_n engendrée par les droites représentées sur Q par les points appartenant au plan $A_n\,A_{n+1}\,A_{n+2}$. Ce plan est l'intersection de S_5 avec l'espace à quatre dimensions $U'_{n-1}\,U'_n\,U'_{n+1}\,U'_{n+2}\,U'_{n+3}$.

Nous avons désigné par Δ_{-n} la quadrique correspondant de la même façon au plan $B_n\,B_{n+1}\,B_{n+2}$, c'est-à-dire à l'espace $V'_{n-1}\,\dots\,V'_{n+3}$. En particulier, nous avons désigné par Δ'_0, Δ'_{-0} les quadriques correspondant aux plans BAA_1, ABB_1, c'est-à-dire aux espaces $U'V'V'_1V'_2V'_3$ et $V'U'U'_1U'_2U'_3$.

Les génératrices d'un mode de la quadrique Δ_n sont représentées par les points de Q appartenant au plan $A_n\,A_{n+1}\,A_{n+2}$.

Les génératrices de l'autre mode sont représentées par la section de Q par le plan conjugué du précédent par rapport à Q. On peut construire ce plan de la manière suivante :

6. Soit $(\overline{x})$ la seconde nappe focale de la congruence (j); les lignes u, v sont également les asymptotiques de cette surface et on peut considérer sur Q les points

$$\overline{\mathrm{U}} = \left| \overline{x}\ \overline{x}^{10} \right|, \qquad \overline{\mathrm{V}} = \left| \overline{x}\ \overline{x}^{01} \right|$$

représentant les tangentes aux asymptotiques au point $\overline{x}$. On a $\mathrm{J} = \overline{\lambda}\,\overline{\mathrm{U}} - \overline{\mu}\,\overline{\mathrm{V}}$ et $\overline{\lambda}$, $\overline{\mathrm{V}}$ d'une part, $\overline{\mu}$, $\overline{\mathrm{U}}$ d'autre part, satisfont à des équations analogues aux équations (1). Cela étant, on peut considérer, dans S_7 le point $\overline{\mathrm{U}}'$ dont les coordonnées sont celles de $\overline{\mathrm{U}}$, $\overline{\mu}$ et 0, ainsi que le point $\overline{\mathrm{V}}'$ dont les coordonnées sont celles de $\overline{\mathrm{V}}$, $\overline{\lambda}$ et 0. Les points $\overline{\mathrm{U}}'$, $\overline{\mathrm{V}}'$ sont transformées de Laplace l'un de l'autre et appartiennent à une suite de Laplace

$$\ldots, \overline{\mathrm{U}}'_n, \ldots, \overline{\mathrm{U}}'_1, \overline{\mathrm{U}}', \overline{\mathrm{V}}', \overline{\mathrm{V}}'_1, \ldots, \overline{\mathrm{V}}'_n, \ldots \qquad (\overline{\mathrm{L}}')$$

dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u. Cette suite appartient à l'espace S_6 d'équation $\mathrm{X}'_0 = 0$.

L'espace $\overline{\mathrm{U}}'_{n-1} \ldots \overline{\mathrm{U}}'_{n+3}$ contient les points $\mathrm{J}_n, \ldots, \mathrm{J}_{n+3}$ et par suite le plan $\mathrm{A}_n\,\mathrm{A}_{n+1}\,\mathrm{A}_{n+2}$.

Si l'on désigne par $(\overline{\overline{x}})$ la seconde nappe focale de la congruence (j'), on peut, en procédant de la même manière, construire dans l'espace S_6 d'équation $\mathrm{X}_0 = 0$, une suite de Laplace

$$\ldots, \overline{\overline{\mathrm{U}}}'_n, \ldots, \overline{\overline{\mathrm{U}}}'_1, \overline{\overline{\mathrm{U}}}', \overline{\overline{\mathrm{V}}}', \overline{\overline{\mathrm{V}}}'_1, \ldots, \overline{\overline{\mathrm{V}}}'_n, \ldots . \qquad (\overline{\overline{\mathrm{L}}}'.)$$

L'espace $\overline{\overline{\mathrm{U}}}'_{n-1}, \ldots, \overline{\overline{\mathrm{U}}}'_{n+3}$ contient le plan $\mathrm{A}_n\,\mathrm{A}_{n+1}\,\mathrm{A}_{n+2}$.

Nous avons établi que la suite L et les suites analogues de S_5 relatives aux surfaces $(\overline{x})$, $(\overline{\overline{x}})$ sont autopolaires par rapport à Q. Désignons par Q' le cône quadratique projetant Q de la droite $\mathrm{O}_0\mathrm{O}'_0$, le point O_0 étant celui dont toutes les coordonnées sont nulles sauf X_0 et O'_0, le point dont toutes les coordonnées sont nulles sauf X'_0. Les projections des suites de Laplace (L'), $(\overline{\mathrm{L}}')$, $(\overline{\overline{\mathrm{L}}}')$ sont autopolaires par rapport à Q'.

L'hyperplan de S_7 projetant de $O_0O'_0$ l'espace $U'_{n-1} \ldots U'_{n+3}$ a pour conjugué par rapport à Q' le plan $O_0O'_0V_{n+1}$. Les hyperplans de S_7 projetant de $O_0O'_0$ les espaces $\overline{U}'_{n-1} \ldots \overline{U}'_{n+3}$, $\overline{\overline{U}}'_{n-1} \ldots \overline{\overline{U}}'_{n+3}$ ont respectivement pour conjugués par rapport à Q' les plans $O_0O'_0\overline{V}'_{n+1}$, $O_0O'_0\overline{\overline{V}}'_{n+1}$. Il en résulte que les espaces $O_0O'_0A_nA_{n+1}A_{n+2}$ et $O_0O'_0V'_{n+1}\overline{V}'_{n+1}\overline{\overline{V}}'_{n+1}$ sont conjugués par rapport à Q', donc, dans S_5, les plans $A_nA_{n+1}A_{n+2}$ et $V_{n+1}\overline{V}_{n+1}\overline{\overline{V}}_{n+1}$ sont conjugués par rapport à Q.

7. Les génératrices rectilignes des deux modes de la quadrique Δ_n sont donc représentées par les points de Q situés dans les plans $A_nA_{n+1}A_{n+2}$ et $V_{n+1}\overline{V}_{n+1}\overline{\overline{V}}_{n+1}$.

De même, les deux systèmes de génératrices rectilignes de la quadrique Δ_{-n} sont représentés par les sections de Q par les plans $B_nB_{n+1}B_{n+2}$ et $U_{n+1}\overline{U}_{n+1}\overline{\overline{U}}_{n+1}$, conjugués par rapport à cette hyperquadrique.

En particulier, les sections de Q par les plans BAA_1 et $V\overline{V}\overline{\overline{V}}$ représentent les deux systèmes de génératrices rectilignes de la quadrique Δ'_0 et les sections de Q par les plans ABB_1, $U\overline{U}\overline{\overline{U}}$ représentent les deux systèmes de génératrices rectilignes de la quadrique Δ'_{-0}.

On sait que dans la suite de quadriques

$$\ldots, \Delta_n, \ldots, \Delta_1, \Delta_0, \Delta'_0, \Delta'_{-0}, \Delta_{-0}, \Delta_{-1}, \ldots, \Delta_{-n}, \ldots,$$

une quadrique touche en quatre points la précédente et la suivante, les huit points ainsi définis étant caractéristiques pour la quadrique.

Liège, le 5 septembre 1956.