Bull. Soc. Royale Sciences Liège, 27e année, n⁰ 3-4, 1958, pp. 49-53

SUR LA JACOBIENNE D'UN RÉSEAU DE COURBES TRACÉES SUR UNE SURFACE ALGÉBRIQUE

par Lucien GODEAUX,
Membre de la Société

On sait que pour définir le système canonique d'une surface algébrique, F. Enriques introduit le système jacobien $|C_j|$ d'un système linéaire $|C|$, c'est-à-dire le système linéaire complet contenant les jacobiennes des différents réseaux tirés de $|C|$ (1). Les jacobiennes C_j se comportent aux points-base du système $|C|$ comme si la surface était un plan. Il en est de même si les courbes C passant par un point ont en ce point une multiplicité supérieure à l'unité. Habituellement, on établit ces points en remarquant que les propriétés en question sont de caractère infinitésimal. Or, on peut établir ces propriétés par un procédé élémentaire, ne faisant appel qu'à de simples propriétés d'algèbre. C'est ce que nous faisons dans cette note.

Nous établissons précisément que :

Si $|C|$ *est un réseau de courbes tracées sur une surface algébrique* F, *en un point-base de* $|C|$, *simple pour la surface* F *et multiple d'ordre s pour les courbes* C, *la jacobienne* C_j *de* $|C|$ *a la multiplicité* $3s - 1$.

Nous montrons en passant que si, parmi les courbes C, il existe un faisceau ayant la multiplicité $s + 1$ au point-base considéré, ou s'il existe une courbe C ayant la multiplicité $s + 2$ en ce point, celui-ci est multiple d'ordre $3s$ pour la jacobienne C_j.

Si les courbes C *passant par un point simple de* F *ont la multiplicité s en ce point, celui-ci est multiple d'ordre* $2s - 2$ *pour la jacobienne* C_j.

(1) F. Enriques, *Intorno ai fondamenti della Geometria sopra le superficie algebriche* (Atti della Accademia di Torino, 1901-1902, pp. 1-24). *Le superficie algebriche* (Bologne, Zanichelli, 1949).

1. Soient $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ l'équation d'une surface algébrique F d'ordre m et

$$\lambda_1 \varphi_1 (x_1, x_2, x_3, x_4) + \lambda_2 \varphi_2 + \lambda_3 \varphi_3 = 0 \tag{1}$$

l'équation d'un réseau de surface φ d'ordre n. Les surfaces φ découpent sur F des courbes variables C formant un réseau $|C|$ que nous supposerons irréductible. Nous nous proposons de rechercher l'équation de la surface découpant sur F la jacobienne C_j du réseau $|C|$.

La jacobienne J des surfaces $F = 0$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$ est le lieu des points P tels que les plans polaires de ce point par rapport à ces surfaces se coupent en un point P'. Si P est un point simple de F, son plan polaire par rapport à cette surface est le plan tangent ϖ en ce point. Le point P' se trouve dans ϖ. Les surfaces (1) passant par P forment un faisceau et les plans polaires de P par rapport à ces surfaces, c'est-à-dire les plans tangents à ces surfaces en P, passent par P'. Ces surfaces découpent donc sur F des courbes C ayant même tangente en P et celui-ci appartient donc à la jacobienne C_j de $|C|$.

Analytiquement, la condition pour qu'une surface (1) touche F en un point x s'écrit

$$\lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} + \lambda_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_i} = \rho \frac{\partial F}{\partial x_i}, \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

équations qui doivent être compatibles en $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \rho$. La surface J, d'équation

$$J = \frac{\partial(F, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3, x_4)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial F}{\partial x_2} & \frac{\partial F}{\partial x_3} & \frac{\partial F}{\partial x_4} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_4} \end{vmatrix};$$

est d'ordre $m + 3n - 4$ et découpe sur F la jacobienne C_j de $|C|$.

2. Supposons que le point $0_4\,(0, 0, 0, 1)$ soit un point simple de la surface F en lequel les courbes C ont un point multiple d'ordre s.

Posons

$$F = x_4^{m-1}\, f_1(x_1, x_2, x_3) + x_4^{m-2} f_2 + \dots + f_m,$$

$$\varphi_1 = x_4^{n-1}\, \alpha_1\, (x_1, x_2, x_3) + x_4^{n-2}\, \alpha_2 + \dots + \alpha_n,$$

$$\varphi_2 = x_4^{n-1}\, \beta_1\, (x_1, x_2, x_3) + x_4^{n-2}\, \beta_2 + \dots + \beta_n,$$

$$\varphi_3 = x_4^{n-1}\, \gamma_1\, (x_1, x_2, x_3) + x_4^{n-2}\, \gamma_2 + \dots + \gamma_n,$$

les f, α, β, γ étant des formes algébriques dont le degré est indiqué par l'indice.

La condition pour que les surfaces (1) coupent f suivant des courbes C ayant la multiplicité s en 0_4 est que ces surfaces aient un contact d'ordre $s - 1$ en ce point avec cette surface.

En multipliant éventuellement $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ par des constantes, ces conditions s'expriment par les équations

$$f_1 = \alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1,\ f_2 = \alpha_2 = \beta_2 = \gamma_2,\ \dots,$$
$$f_{s-1} = \alpha_{s-1} = \beta_{s-1} = \gamma_{s-1}\,.$$

Cela étant, considérons les surfaces (en supposant $m \geqslant n$)

$$\varphi_1' = F - x_4^{m-n}\, \varphi_1 = x_4^{m-s}\, \alpha_s' + x_4^{m-s-1}\, \alpha_{s+1}' + \dots + \alpha_m' = 0,$$

$$\varphi_2' = F - x_4^{m-n}\, \varphi_2 = x_4^{m-s}\, \beta_s' + x_4^{m-s-1}\, \beta_{s+1}' + \dots + \beta_m' = 0,$$

$$\varphi_3' = F - x_4^{m-n}\, \varphi_3 = x_4^{m-s}\, \gamma_s' + x_4^{m-s-1}\, \gamma_{s+1}' + \dots + \gamma_m' = 0.$$

Un calcul simple montre que l'on a

$$J' = \frac{\partial(F, \varphi_1', \varphi_2', \varphi_3')}{\partial(x_1, x_2, x_3, x_4)} = \frac{m}{n}\, x_4^{3(m-n)}\, J + \frac{m(m-n)}{n}\, F\, \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)}\,.$$

Il en résulte que la surface $J' = 0$ contient la courbe C_j et que les tangentes en 0_4 à la courbe intersection des surfaces $J' = 0$ et $F = 0$ coïncident avec les tangentes à la courbe C_j au même point.

Dans l'équation de $J' = 0$, le degré le plus élevé en x_4 est $4m - 3s - 2$. Le coefficient de ce terme est

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_3} & (m-1) f_1 \\ \dfrac{\partial \alpha_s'}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \alpha_s'}{\partial x_2} & \dfrac{\partial \alpha_s'}{\partial x_3} & (m-s)\, \alpha_s' \\ \dfrac{\partial \beta_s'}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \beta_s'}{\partial x_2} & \dfrac{\partial \beta_s'}{\partial x_3} & (m-s)\, \beta_s' \\ \dfrac{\partial \gamma'}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \gamma_s'}{\partial x_2} & \dfrac{\partial \gamma_s}{\partial x_3} & (m-s)\, \gamma_s' \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire

$$f_1 \, \frac{\partial(\alpha_s', \beta_s', \gamma_s')}{\partial(x_1, x_2, x_3)} \, .$$

le cône tangent à $J' = 0$ au point 0_4 se compose donc du plan tangent en ce point à F et d'un cône d'ordre $3s - 3$. Le plan tangent à F coupe cette surface suivant une courbe ayant un point double en 0_4 et le cône suivant une courbe ayant la multiplicité $3s - 3$. La courbe C_j a donc comme tangentes en 0_4 les $3s - 1$ tangentes à ces courbes. La courbe C_j a donc bien la multiplicité $3s - 1$ en un point-base multiple d'ordre s du réseau $|C|$.

3. La multiplicité de C_j en 0_4 peut évidemment être plus élevée. Supposons qu'une des courbes C ait la multiplicité $s + 1$ en 0_4 et que ce soit précisément celle qui est découpée par $\varphi_3 = 0$. Cela revient à admettre que cette surface a une contact d'ordre s avec la surface F au point 0_4, c'est-à-dire que l'on a $\gamma_s' = 0$.

Dans ces conditions, le terme de degré le plus élevé en x_4 est

$$x_4^{4m-3s-3} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_3} & (m-1) f_s \\ \dfrac{\partial \alpha_s'}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \alpha_s'}{\partial x_2} & \dfrac{\partial \alpha_s'}{\partial x_3} & (m-s)\, \alpha_s' \\ \dfrac{\partial \beta_s'}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \beta_s'}{\partial x_2} & \dfrac{\partial \beta_s'}{\partial x_3} & (m-s)\, \beta_s' \\ \dfrac{\partial \gamma_{s+1}'}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \gamma_{s+1}'}{\partial x_2} & \dfrac{\partial \gamma_{s+1}'}{\partial x_3} & (m-s-1)\, \gamma_{s+1}' \end{vmatrix}$$

Le cône tangent en 0_4 est d'ordre $3s - 1$ et ne contient plus comme partie le plan tangent à F en ce point. La jacobienne C_j a donc encore la multiplicité $3s - 1$ en 0_4.

Pour que la jacobienne C_j ait la multiplicité $3s$ en 0_4, on voit facilement qu'il suffit que l'on ait soit un faisceau de courbes C ayant la multiplicité $s + 1$ en 0_4, ce qui implique $\beta_s' = 0$, $\gamma_s' = 0$, soit qu'une courbe C ait la multiplicité $s + 2$ en 0_4, ce qui implique $\gamma_s' = 0$, $\gamma_{s+1}' = 0$.

4. Nous allons maintenant supposer que le point 0_4 étant toujours simple pour la surface F et n'étant pas un point-base du réseau $|C|$, il existe un faisceau de courbes C, soit $\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 = 0$, ayant la multiplicité s en 0_4.

En raisonnant comme plus haut, cela implique

$$f_1 = \alpha_1 = \beta_1, f_2 = o_2 = \beta_2, \ldots, f_{s-1} = \alpha_{s-1} = \beta_{s-1}.$$

Considérons alors les surfaces

$$\begin{aligned}
\varphi_1' &= F - x_4^{m-n}\,\varphi_1 = x_4^{m-s}\,\alpha_s' + \ldots + \alpha_m' = 0,\\
\varphi_2' &= F - x_4^{m-n}\,\varphi_2 = x_4^{m-s}\,\beta_s' + \ldots + \beta_m' = 0,\\
\varphi_3' &= F - x_4^{m-n}\,\varphi_3 = x_4^{m}\,\gamma_0' + x_4^{m-1}\,\gamma_1' + \ldots + \gamma_m' = 0.
\end{aligned}$$

Nous avons encore la relation

$$J' = \frac{\partial(F, \varphi_1', \varphi_2', \varphi_3')}{\partial(x_1, x_2, x_3, x_4)} = -\frac{m}{n}\, x_4^{3(m-n)}\, J + \frac{m(m-n)}{n}\, F\, \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)},$$

et l'on voit que les tangentes à la courbe C_j en 0_4 coïncident avec les tangentes en ce point à la courbe intersection des surfaces $J' = 0$, $F = 0$.

Dans J', le terme le plus élevé en x_4 est

$$x_4^{4m-2s-2}\,\gamma_0'\,\frac{\partial(\varphi_1, \alpha_s', \beta_s')}{\partial(x_1, x_2, x_3)}.$$

Le point 0_4 est donc multiple d'ordre $2s - 2$ pour la surface $J' = 0$ et par conséquent pour la jacobienne C_j du réseau $|C|$.

En résumé, la jacobienne C_j d'un réseau $|C|$ possède la multiplicité $2s - 2$ en un point multiple d'ordre s pour les courbes C passant par ce point, ce dernier n'étant pas un point-base de $|C|$

Liège, le 22 novembre 1957.