Sur le système canonique de certaines surfaces de genre linéaire un

par LUCIEN GODEAUX
Membre de l'Académie

Dans cette note nous construisons, comme application de nos résultats sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (1), des surfaces dont *les courbes canoniques sont formées d'une courbe elliptique fixe comptée deux fois et de* $\nu - 1$ *courbes elliptiques variables dans un faisceau dont la partie fixe fait partie comme courbe totale.*

Nous construisons également, en terminant, une surface triple.

1. — Considérons la courbe

$$a_1 x_1^{3\nu+2} x_2 + a_2 x_2^{3\nu+2} x_3 + a_3 x_3^{3\nu+2} x_1 = 0\,, \tag{1}$$

où ν est un entier positif. Cette courbe est transformée en soi par l'homographie H d'équations

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^\alpha x_3 \tag{H}$$

où ε est une racine primitive d'ordre

$$p = 3(3\nu^2 + 3\nu + 1)$$

(1) *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Actualités scient., n° 270; Paris, Hermann, 1935); *Sur les surfaces multiples ayant un nombre fini de points de diramation* (Annales Scient. de l'Ecole Normale Supérieure, 1938, pp. 193-222); *Sur la structure des points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Mémoires in-8° de l'Acad. roy. de Belgique, 1938); *Les points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Annales Scient. de l'Ecole Normale Supérieure, 1948, pp. 189-210); *Sur les points de diramation isolés des surfaces multiples* (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 1949, pp. 15-30, 270-284, 285-292, 532-541, 636-641, 828-833, 834-840).

de l'unité et où l'on a

$$\alpha = 9\nu^2 + 6\nu + 2 .$$

L'homographie (H) a la période p et détermine sur la courbe (1) une série γ_p d'ordre p présentant trois points unis : les sommets du triangle de référence.

Nous poserons

$$q = 3\nu^2 + 3\nu + 1$$

et nous supposerons ν choisi de telle sorte que q soit un nombre premier.

L'homographie H^q, de période trois, transforme la courbe (1) en soi et en posant $\eta = \varepsilon^q$, ses équations peuvent s'écrire

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1 : \eta x_2 : \eta^2 x_3 .$$

Rapportons projectivement les courbes

$$\lambda_0 \, x_1 \, x_2 \, x_3 + \lambda_1 x_1^3 + \lambda_2 x_2^3 + \lambda_3 x_3^3 = 0$$

aux plans d'un espace en posant

$$\frac{X_0}{x_1 \, x_2 \, x_3} = \frac{X_1}{x_1^3} = \frac{X_2}{x_2^3} = \frac{X_3}{x_3^3} \tag{2}$$

Aux groupes de l'involution du troisième ordre engendrée par H^q dans le plan (x) correspondent les points de la surface cubique Φ,

$$X_1 \, X_2 \, X_3 = X_0^3 .$$

La surface Φ possède trois points doubles biplanaires $O_1(0, 1, 0, 0)$, $O_2\,(0, 0, 1, 0,)$ et $O_3(0, 0, 0, 1)$ qui correspondent aux points unis $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ de l'homographie H^q [1].

A la courbe (1) correspond sur Φ une courbe C d'ordre $3\nu + 3$ dont les équations s'obtiennent de la manière suivante :

Multiplions les deux membres de l'équation (1) par $x_1 x_2^2$. En tenant compte des équations (2), on obtient une surface

$$a_1 \, X_1^{\nu+1} \, X_2 + a_2 \, X_0 \, X_2^{\nu+1} + a_3 \, X_0^2 \, X_3^{\nu} = 0,$$

qui passe par la courbe C.

---

[1] *Etude élémentaire sur l'homographie plane de période trois et sur une surface cubique* (Nouvelles Annales de Mathémathiques, 1916, pp. 49-61).

On obtient de même, en multipliant les deux membres de (1) par $x_2 x_3^2$ et par $x_3 x_1^2$, les équations de deux autres surfaces passant par C,

$$a_1 X_0^2 X_1^\nu + a_2 X_2^{\nu+1} X_3 + a_3 X_0 X_3^{\nu+1} = 0 ,$$
$$a_1 X_0 X_1^{\nu+1} + a_2 X_2^0 X_2^\nu + a_3 X_3^{\nu+1} X_1 = 0 .$$

Ces trois équations, jointes à l'équation de Φ, peuvent s'écrire sous la forme

$$\left\| \begin{matrix} a_1 X_1^\nu & X_0 & 0 & -X_3 \\ a_2 X_2^\nu & -X_1 & X_0 & 0 \\ a_3 X_3^\nu & 0 & -X_2 & X_0 \end{matrix} \right\| = 0 .$$

La courbe C est de genre $\frac{3}{2}\nu(\nu + 1)$.

2. — Elevons les deux membres de l'équation (1) au cube. En tenant compte des équations (2), on obtient

$$a_1^3 X_1^{3\nu+2} X_2 + a_2^3 X_2^{3\nu+2} X_3 + a_3^3 X_3^{3\nu+2} X_1$$
$$+3X_0 \left(a_1^2 a_2 X_1^{2\nu+1} X_2^{\nu+1} + a_2^2 a_3 X_2^{2\nu+1} X_3^{\nu+1} + a_3^2 a_1 X_3^{2\nu+1} X_1^{\nu+1}\right)$$
$$+ 3X_0^2 \left(a_1^2 a_3 X_1^{2\nu+1} X_3^\nu + a_2^2 a_1 X_2^{2\nu+1} X_1^\nu + a_3^2 a_2 X_3^{2\nu+1} X^\nu\right)$$
$$+ 6a_1 a_2 a_3 X_0^{3\nu+3} = 0 .$$

Cette équation représente une surface F d'ordre $3\nu + 3$ qui a un contact du second ordre avec la surface Φ le long de la courbe C.

La surface F passe simplement par les points O_1, O_2, O_3, en y touchant respectivement les plans $X_2 = 0$, $X_3 = 0$, $X_1 = 0$.

A l'homographie H considérée dans le plan (x) correspond dans l'espace (X) une homographie H_1 de période q. En posant $\zeta = \varepsilon^3$, on obtient, pour équations de H_1,

$$X_0' : X_1' : X_2' : X_3' = \zeta^{3\nu^2+2\nu+1} X_0 : X_1 : \zeta X_2 : \zeta^{3\nu^2} X_3 ,$$

ou encore

$$X_0' : X_1' : X_2' : X_3' = X_0 : \zeta^\nu X_1 : \zeta^{\nu+1} X_2 : \zeta^{3\nu^2+\nu} X_3 \quad .$$

La courbe C est évidemment transformée en elle-même par H_1; il en est de même des surfaces F et Φ.

L'homographie H_1 a comme points unis les sommets du tétraèdre de référence; elle engendre sur F une involution I_q, d'ordre q, ayant comme points unis les points O_1, O_2, O_3. Nous allons étudier cette involution.

3. — Etudions successivement les points unis O_1, O_2, O_3.

En O_1, le plan tangent à F est $X_2 = 0$ et dans ce plan, H_1 détermine l'homographie

$$X_1' : X_3' : X_0' = X_1 : \zeta^{3\nu^2} X_3 : \zeta^{3\nu^2+2+\nu 1} X_0 .$$

On a

$$3\nu^2(\nu+1) \equiv 3\nu^2 + 2\nu + 1 \ , \qquad \text{(mod. } q)$$

c'est-à-dire qu'en posant $\omega = \zeta^{3\nu^2}$, on peut représenter l'homographie précédente par

$$X_1' : X_3' : X_0' = X_1 : \omega X_3 : \omega^{\nu+1} X_0 \ .$$

Si l'on se reporte aux notations de nos recherches sur les points unis et les points de diramation parues l'an dernier, les entiers caractéristiques du point uni O_1 sont

$$\alpha = \nu + 1 \ , \qquad \beta = 3\nu^2 + 1 \ .$$

On a en effet,

$$\alpha\beta - 1 \equiv (\nu+1)(3\nu^2+1) - 1 \equiv 0 \ , \qquad \text{(mod. } q)$$

Le plan tangent à F en O_2 est $X_3 = 0$ et dans ce plan, H_1 détermine l'homographie

$$X_2' : X_1' : X_0' = \zeta^{\nu+1} X_2 : \zeta^{\nu} X_1 : X_0 \ ,$$

ou encore, en posant $\omega = \zeta^{3\nu(\nu+1)}$,

$$X_2' : X_1' : X_0' = X_0 : \omega X_1 : \omega^{\nu+1} X_0 \ .$$

Les entiers caractéristiques du point uni O_2 sont donc les nombres α, β définis pour O_1.

Le plan tangent à F en O_3 est $X_1 = 0$ et dans ce plan H_1 détermine l'homographie

$$X_3' : X_2' : X_0' = \zeta^{3\nu 2+\nu} X_3 : \zeta^{\nu+1} X_2 : X_0 \ ,$$

ce qui peut s'écrire, en posant $\omega = \zeta^{3\nu+2}$,

$$X_3' : X_2' : X_0' : = X_3 : \omega X_2 : \omega^{\nu+1} X_0 \ .$$

On trouve donc, pour O_3, les mêmes entiers caractéristiques α, β que pour O_1, O_2.

4. — Désignons par F' une surface image de l'involution I_q sur laquelle aux points unis O_1, O_2, O_3 correspondent des points de diramation isolés O_1', O_2', O_3'.

Pour déterminer la structure des points unis et des points de diramation correspondants, nous devons chercher la solution des congruences

$$\lambda + \alpha\,\mu \equiv 0\,, \qquad \mu + \beta\,\lambda \equiv 0\,, \qquad \qquad (\text{mod. } q)$$

telle que les entiers positifs λ, μ donnent la valeur minimum à la somme $\lambda + \mu$. On trouve actuellement $\lambda = 1$, $\mu = 3\nu$.

Comme on a exactement

$$\lambda + (\nu + 1)\,\mu = q\,, \qquad \mu + (3\nu^2 + 1)\,\lambda = q\,,$$

il résulte de nos recherches que la surface F' possède en O_1', O_2', O_3' des points multiples d'ordre $3\nu + 1$, le cône tangent à la surface en ce point se décomposant en un cône d'ordre 3ν et en un plan coupant le cône suivant une génératrice.

D'après les résultats que nous avons obtenus dans notre Mémoire des Annales de l'École normale supérieure en 1938, deux cas peuvent se présenter :

a) ν est impair. Posons $\nu = 2t + 1$. Chacun des points de diramation est équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à un ensemble de $2t + 2$ courbes rationnelles

$$\sigma_1, \rho_{11}, \rho_{12}, \ldots, \rho_{1t}, \rho_{2t}, \ldots, \rho_{22}, \rho_{21}, \sigma_2,$$

dont chacune rencontre la précédente et la suivante en un point, mais ne rencontre pas les autres. La courbe σ_1 est de degré virtuel $-(3\nu+1)$, les autres sont de degré virtuel -2.

b) ν est impair. Posons $\nu = 2t + 2$. Chacun des points de diramation est équivalent à un ensemble de $2t + 3$ courbes rationnelles

$$\sigma_1, \rho_{11}, \rho_{12}, \ldots, \rho_{1t}, \rho_0, \rho_{2t}, \ldots, \rho_{21}, \sigma_2,$$

dont chacune renconrre la précédente et la suivante en un point, mais ne rencontre pas les autres. La courbe σ_1 a encore le degré virtuel $-(3\nu+1)$ et les autres ont le degré virtuel -2.

5. — Nous allons maintenant calculer les genres arithmétique et linéaire de la surface F′ en utilisant les résultats d'une note récente (1).

Les courbes canoniques K′ de F′ rencontrent la courbe σ_1, dans chaque cas, en $3\nu - 1$, points, mais ne rencontrent pas les autres courbes composant un point de diramation. On en conclut que sur la surface F, les transformées des courbes canoniques K′ ont la multiplicité $3\nu - 1$ aux points O_1, O_2, O_3.

La surface F est d'ordre $3\nu + 3$; elle est en général dépourvue de points de multiplicité supérieure à deux et par conséquent son genre arithmétique est

$$p_a = \binom{3\nu+2}{3} = \frac{1}{2}\,\nu(3\nu+1)\,(3\nu+2)\,.$$

Son genre linéaire est

$$p^{(1)} = 3(\nu+1)\,(3\nu-1)^2 + 1\;.$$

Le nombre de points absorbés en un des points O_1, O_2, O_3 dans l'intersection de deux courbes canoniques de F, transformées de courbes canoniques de F′, est

$$h = q\,(2\nu-5) + \nu\,(3\nu+1) + 5\;.$$

(1) *Sur le calcul des invariants d'une surface multiple ayant un nombre fini de points de diramation* (Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique, 1950, pp. 170-179).

Par conséquent, si $p'^{(1)}$ est le genre linéaire de F', on a

$$q(p'^{(1)} - 1) = p^{(1)} - 1 - 3q(2\nu - 5) - 3\nu\,(3\nu + 1) - 15.$$

On en déduit

$$p'^{(1)} = 1\ .$$

Entre le genre arithmétique p_a de F et celui p'_a de F', on a la relation

$$12(p_a + 1) = 12q(p'_a + 1) - 3\Delta\ ,$$

où Δ est le nombre qui dépend d'un des points O'_1, O'_2, O'_3. On a, que ν soit pair ou impair,

$$\Delta = q(2\nu - 5) + \nu(3\nu + 1) + 5\ .$$

On en déduit $p'_a = \nu$.

La surface F' *a donc les genres*,

$$p'_a = \nu\ , \qquad p'^{(1)} = 1\ .$$

La surface F est régulière et il en est de même de F', donc le genre géométrique de cette surface est $p'_g = \nu$.

6. — Envisageons en premier lieu le cas $\nu = 1$. On a alors $q = 7$ et les courbes canoniques de F sont découpées par les quadriques. Celle de ces courbes qui est la transformée de l'unique courbe canonique de F' doit passer deux fois par les points O_1, O_2, O_3. C'est donc la section de F par le plan $X_0 = 0$, comptée deux fois.

La surface F' possède une seule courbe canonique, formée d'une courbe elliptique comptée deux fois.

Supposons maintenant $\nu > 1$. Le système canonique de F' est composé au moyen d'un faisceau de courbes elliptiques.

Les adjointes à la surface F sont d'ordre $3\nu - 1$. Les courbes canoniques de F transformées des courbes canoniques K' de F' doivent passer $3\nu - 1$ fois par O_1, O_2, O_3. Parmi ces courbes se trouve la section de F par le plan $X_0 = 0$, comptée $3\nu - 1$ fois,

Parmi les adjointes d'ordre $3\nu - 1$ à F se trouve une surface formée de la surface Φ comptée $\nu - 1$ fois, jointe au plan $X_0 = 0$ compté deux fois. Comme Φ oscule F le long de C, la courbe découpée par cette adjointe sur F se compose de la courbe C comptée $3\nu - 3$ fois et de la section par $X_0 = 0$ comptée deux fois. Cette courbe passe $3\nu - 1$ fois par les points O_1, O_2, O_3 et par conséquent, c'est la transformée d'une courbe canonique K' de F'.

On en conclut que les courbes canoniques de F transformées des courbes canoniques K' de F' sont découpées sur F par les adjointes

$$X_0^2(X_1X_2X_3 + \lambda X_0^3)^{\nu-1} = 0 \ .$$

Le système canonique de F' *se compose d'une courbe elliptique fixe, comptée deux fois, et des groupes de* $\nu - 1$ *courbes elliptiques d'un faisceau, qui comprend la partie fixe comme courbe totale.*

Le cas $\nu = 1$ rentre dans cet énoncé.

7. — Retournons maintenant à la surface F et calculons la classe de la développable lieu des plans tangents aux surfaces F, Φ le long de la courbe C.

La première polaire d'un point quelconque M par rapport à Φ est une quadrique passant par O_1, O_2, O_3 et coupant encore C en $3(2\nu + 1)$ points. Donc la classe de la développable en question est égale à $3(2\nu + 1)$.

La première polaire de M par rapport à F est une surface d'ordre $3\nu + 2$ qui, en général, ne passe pas par O_1, O_2, O_3, qui sont simples pour F. Parmi les $3(\nu + 1)$ $(3\nu + 2)$ points de rencontre de cette polaire avec C, se trouvent les $3(2\nu + 1)$ points en lesquels les plans tangents à F et Φ passent par M. Soit P un des points restants.

Le point P est simple pour Φ; s'il était simple pour F, le plan tangent à F en ce point passerait par M. Comme il coïnciderait avec le plan tangent à Φ, celui-ci passerait par M, ce qui est absurde. Le point P est donc double pour F.

Puisque F et Φ ont un contact du second ordre le long de C, une tangente à Φ en P doit rencontrer F en trois points confondus en P, donc le plan tangent à Φ en P est tangent à F en ce point. Il en résulte que P est un point double biplanaire de F.

La surface F contient donc $3(3\nu^2 + 3\nu + 1)$ points doubles biplanaires sur la courbe C.

Il en résulte que la surface F est l'image d'une involution du troisième ordre, ayant $3(3\nu^2 + 3\nu + 1) = p$ points unis, appartenant à la surface de S_4, d'équations

$$F(X_0, X_1, X_2, X_3) = 0 , \qquad X_1X_2X_3 - X_0^3 = X_4^3 ,$$

$F = 0$ étant l'équation de la surface F.

Le genre arithmétique et le genre linéaire de la surface précédente se calculent au moyen des formules que nous avons données dans nos recherches sur les involutions. On trouve

$$p^{(1)} = 9 (\nu + 1) (3\nu - 1)^2 + 1 ,$$

$$p_a = \frac{3\nu}{2} (9\nu^2 + 5\nu - 2) .$$

Observons que la surface considérée est normale dans S_4, car il ne peut exister qu'une surface cubique passant par les p points doubles biplanaires de F situés sur C.

8. — Si, dans l'équation de la courbe (1), on avait $a_1 = a_2 = a_3$, cette courbe serait transformée en soi par l'homographie de période trois

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_2 : x_3 : x_1 .$$

La surface F serait transformée en soi par l'homographie

$$X_0' : X_1' : X_2' : X_3' = X_0 : X_2 : X_3 : X_1 .$$

Cette homographie engendre sur F une involution d'ordre trois ayant comme points unis les $3\nu + 3$ points de rencontre de la surface avec l'axe ponctuel

$$X_1 = X_3 = X_3$$

de l'homographie.

Liège, le 14 avril 1950.