(Dai « Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni », Serie V, Vol. VIII, Fasc. 1-2, Roma 1950).

Osservazioni sui punti uniti delle involuzioni cicliche appartenenti ad una superficie algebrica.

Nota di **LUCIEN GODEAUX** (Liegi)

Vogliamo fare due osservazioni sui punti uniti isolati di una involuzione ciclica appartenente ad una superficie algebrica. La prima è una pura questione di terminologia, la seconda tratta delle successioni di punti uniti infinitamente vicini (negli intorni successivi) ad un punto unito isolato.

1. — Sia F una superficie algebrica senza punti singolari. Supponiamo che F contenga un'involuzione I_p, di ordine primo p, ciclica, generata da una trasformazione birazionale T di F in sè. Inoltre, supponiamo che I_p possegga punti unitì isolati e sia A uno di questi punti.

Nell'intorno del primo ordine del punto A, la trasformazione T può determinare la identità, oppure una omografia ciclica di ordine p, possedente due punti uniti. In nostri lavori anteriori, abbiamo addottato la terminologia seguente: nel primo caso, il punto A è detto punto unito perfetto; nel secondo, punto unito non perfetto.

Il Prof. SEVERI ha fatto osservare che questa terminologia non era d'accordo con quella addotata da PIERI (1) e precisata dal Prof. SEVERI stesso (2).

Consideriamo un ramo di curva γ_1 tracciato su F, passante per A e siano $\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_p$ le sue trasformate mediante $T, T^2, \ldots, T^{p-1}$. Ad un punto P_1 di γ_1, corrispondono i punti $P_2, P_3, \ldots, P_p$ di

(1) PIERI, *Formule di coincidenza per le serie algebriche* ∞^n *di coppie di punti dello spazio a n dimensioni* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1891, t. V, pp. 252-208).

(2) SEVERI, *Serie, Sistemi d'equivalenza e corrispondenze algebriche sulle varietà algebriche* (Roma, Ed. Cremonese, 1942). Ved. p. 278 et seg.

$\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_p$. Quando P_1 si avvicina ad A sul ramo γ_1, i punti $P_2, P_3, \ldots, P_p$ si avvicinano ad A su $\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_p$. Le posizioni limite delle rette $P_1 P_2, P_1 P_3, \ldots, P_{p-1} P_p$ sono le cosidette *direzioni principali* del punto unito A. Quando tutte le direzioni uscenti di A sono principali, il punto è detto di *coincidenza perfetta* o *punto unito perfetto.*

Il Prof. SEVERI ha stabilito che un punto unito isolato, cioè una coincidenza isolata, è sempre in questo senso perfetta. Invece, egli ha chiamato *ipercoincidenza* un punto unito isolato che noi abbiamo chiamato punto unito perfetto. Bisogna dunque cambiare la nostra terminologia per metterci d'accordo con quella di PIERI-SEVERI.

Chiameremo perciò:

Ipercoincidenza o *punto unito di prima specie* un punto unito isolato di I_p nell'intorno del primo ordine del quale la trasformazione T sia identica.

Punto unito di seconda specie un punto unito isolato di I_p nell'intorno del primo ordine del quale T subordini un'omografia di ordine p (3). Queste denominazioni saranno anche utilizzate per i punti uniti infinitamente vicini al punto A, nei successivi intorni di questo punto.

2. — Consideriamo un punto unito A di seconda specie. Nell'intorno del primo ordine di questo punto, vi sono due punti uniti A_1, A_2. Se A_1 non è di prima specie, vi sono, nel intorno del secondo ordine di A, infinitamente vicini di A_1, due punti uniti A_{11}, A_{12}. Nello stesso modo, se A_2 non è unito di prima specie, vi sono due punti uniti A_{21}, A_{22}, infinitamente vicini ad A_2, nel intorno del secondo ordine di A. E così via. Il punto unito di seconda specie A è dunque l'origine da una specie di albero di punti uniti.

Evidentemente, i punti di questo albero che appartengono a curve algebriche trasformate in sè da T e variabili in un sistema lineare, formano una successione chiusa di punti uniti di prima specie. Queste successioni comprendono un numero finito di punti.

(3) Queste denominazioni sono giustificate del fatto che se noi consideriamo una involuzione ciclica sopra una varietà a più dimensioni, ad esempio sopra una varietà a tre dimensioni, vi sono tre specie di punti uniti isolati, perchè la trasformazione generatrice dell'involuzione può, nell'intorno del primo ordine di questo punto, dare sia l'identità, sia un'omologia, sia un'omografia non omologica.

È possibile di trarre dall'albero una successione di punti infinitamente vicini, che non termini con un punto unito di prima specie o ipercoincidenza? La risposta è affermativa. Per provare ciò, basta costruire uno esempio.

3. — Consideriamo nel piano la omografia T, non omologica, di periodo sette:

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1 : \varepsilon\, x_2 : \varepsilon^2\, x_3 ,$$

dove $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{7}}$ è una radice primitiva di ordine 7 del unità. T genera nel piano una involuzione I_7, di ordine 7, di cui i punti uniti sono i vertici del triangolo di riferimento. Fissiamo l'attenzione sopra uno di questi punti: il punto 0_1 $(x_2 = x_3 = 0)$.

Nell'intorno del primo ordine di 0_1, vi sono due punti uniti 0_{12} sulla retta $x_2 = 0$ ed 0_{13} sulla retta $x_3 = 0$.

Per determinare la specie del punto 0_{12}, effettuiamo la trasformazione quadratica θ_2

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1\, x_2 : x_2^2 : x_1\, x_3 .$$

Al punto 0_{12} corrisponde il punto $0_1'$ $(x_2' = x_3' = 0)$ ed alla T, la omologia

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1 : \varepsilon\, x_2 : \varepsilon\, x_3 .$$

Dunque, il punto 0_{12} è unito di prima specie.

Per studiare il punto 0_{13}, effettuiamo la trasformazione quadratica θ_3

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1\, x_3 : x_1\, x_2 : x_3^2 .$$

Al punto 0_{13} corrisponde il punto $(1, 0, 0)$ ed alla T, la omografia T'

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1 : \varepsilon^6\, x_2 : \varepsilon^2\, x_3 .$$

Il punto 0_{13} è dunque unito di seconda specie e nell'intorno del secondo ordine di 0_1, vi sono due punti 0_{132}, 0_{133}, infinitamente vicini ad 0_{13}, uniti per T.

Per analizzare il punto 0_{132}, effettuiamo ancora la θ_2; al punto 0_{132} corrisponde il punto $(1, 0, 0)$ ed alla T', la omografia T''

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1 : \varepsilon^6\, x_2 : \varepsilon^3\, x_3 .$$

Il punto 0_{132} è dunque un punto unito di seconda specie e possiede nel suo intorno del primo ordine due punti uniti 0_{1322}, 0_{1323}.

Effettuiamo di nuovo la trasformazione θ_2; alla T'' corrisponde la omografia T'''

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1 : \varepsilon^6 x_2 : \varepsilon^4 x_3 .$$

Il punto 0_{1322} è dunque unito di seconda specie e ha, nel suo intorno, due punti uniti 0_{13222}, 0_{13223}.

Una nuova applicazione di θ_2 mostra che il punto 0_{13222} è unito di seconda specie. Alla T''' corrisponde la omografia T^{IV}

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1 : \varepsilon^6 x_2 : \varepsilon^5 x_3 .$$

Poniamo $\eta = \varepsilon^6$; le equazioni di T^{IV} si scrivono

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1 : \eta\, x_2 : \eta^2 x_3 .$$

Ne concludiamo che il punto 0_{13222} è della stessa natura del punto 0_1. Ad esso sono infinitamente vicini due punti uniti 0_{132222} di prima specie ed 0_{132223}, della stessa natura che 0_{13}.

La trasformazione $\theta_3\, \theta_2^3$ fa corrispondere alla T una omografia T^{IV} della stessa natura. Le trasformazioni $(\theta_3\, \theta_2^3)^n$, $(\theta_3\, \theta_2^3)^n\, \theta_3$, $(\theta_3\, \theta_2^3)^n\, \theta_3\, \theta_2$, $(\theta_3\, \theta_2^3)^n\, \theta_3\, \theta_2^2$, dove n è uno intero positivo qualunque, danno, negli intorni rispettivamente di ordine $4n$, $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$ di 0_1, punti uniti di seconda specie. Dunque:

Esistono nell'albero dei punti uniti degli intorni successivi di 0_1, una successione di punti infinitamente vicini, che non si chiude con un punto unito di prima specie.

4. — Osserviamo che esiste un sistema lineare di curve che passano per i punti 0_1, 0_{13}, 0_{132}, 0_{1322}, 0_{13222}, 0_{132222}. Esse hanno per equazione

$$\lambda_1\, x_1\, x_2^5\, x_3 + \lambda_2\, x_2^7 + \lambda_3\, x_3^7 = 0. \tag{1}$$

$\theta_3\, \theta_2^4$ fa corrispondere a queste curve, le curve

$$\lambda_1\, x_1^7\, x_2 + \lambda_2\, x_2^7\, x_3 + \lambda_3\, x_1^7\, x_3 = 0 .$$

Le curve (1) hanno la moltiplicità 6 nel punto 0_1 e passano una volta per il punto 0_{12}, una volta per i punti 0_{13}, 0_{132}, 0_{1322}, 0_{13222}, 0_{132222}.

Gubbio - Soc. Tipografica «Oderisi» - 1950