L'état actuel des recherches mathématiques en Belgique (1)

par LUCIEN GODEAUX

C'est un grand honneur que me fait M. le Directeur de la Fondation Biermans-Lapotre en m'invitant à vous parler des recherches mathématiques en Belgique; je l'en remercie vivement. Cette tâche n'est cependant pas sans péril; peut-être vous semblera-t-il en m'écoutant que j'émets implicitement un jugement sur les travaux de mes compatriotes et cela vous paraîtra sans doute bien téméraire de ma part. Il n'est pas dans mes intentions de porter de tels jugements; et si parfois je me borne à citer certains travaux, celà ne signifie nullement que je les trouve sans intérêt.

Une grande figure domine depuis plus d'un demi-siècle la Mathématique en Belgique. Je n'entreprendrai pas de retracer tout ce que nous devons à M. Charles de La Vallée Poussin; ses travaux sont bien connus; vous savez qu'ils ont porté sur la théorie analytique des nombres, sur les fonctions de variables réelles, sur les séries de Fourier et l'approximation des fonctions par des polynomes. A toutes ces théories, il a apporté des contributions fondamentales. Vers la soixantaine, il s'est occupé des fonctions de variables complexes et il vient de publier un volume sur *Le potentiel logarithmique* où il expose les résultats qu'il a obtenus; ceux-ci sont également de grande importance.

Je m'en voudrais de ne pas évoquer ici les recherches de mon regretté Collègue et Ami, Alphonse Demoulin. Elève de Darboux, Demoulin a publié de nombreux travaux sur la Géométrie infinitésimale. Géométre très fin, il excellait à trouver des liaisons entre des questions en apparence disparates. On lui doit notamment de belles extensions aux espaces projectifs de la

---

(1) Conférence faite le 16 novembre 1950 à la séance de rentrée de la Fondation Biermans-Lapotre, à la Cité Universitaire de Paris.

théorie du trièdre mobile et d'importantes recherches sur ce que l'on a appelé depuis la Géométrie projective différentielle. Ses premiers travaux sur ce dernier objet remontent à 1908.

M. Th. Lepage, professeur à l'Université de Bruxelles, me disait un jour que l'Algèbre des formes alternées peut, à certains égards, être considérée comme instrument de synthèse et de recherche comparable à celui que fournit la théorie des groupes pour la Géométrie. On peut faire remonter l'Algèbre alternée à Grassmann, mais c'est Frobenius, H. Poincaré et surtout M. Elie Cartan qui lui ont donné sa forme actuelle. Dans ses recherches, M. Lepage utilise constamment cette Algèbre. A l'équation de Monge-Ampère, il attache une forme différentielle alternée et montre que l'existence des deux systèmes de caractéristiques du premier ordre est liée à la réduction de cette forme.

C'est encore le calcul des formes symboliques de différentielles qui lui a permis d'obtenir un résultat important dans le Calcul des variations des intégrales multiples dépendant de plusieurs fonctions inconnues. On sait que Carathéodory d'une part, MM. De Donder et H. Weyl d'autre part, se sont occupés de cette question. Les résultats obtenus par ces auteurs diffèrent, bien que se réduisant aux résultats classiques lorsque le nombre des fonctions inconnues se réduit à l'unité. Il appartenait à M. Lepage de faire en quelque sorte la synthèse de ces questions en introduisant de nouveaux champs géodésiques comprenant comme cas particuliers les champs de MM. De Donder et Weyl, et ceux de Carathéodory.

Antérieurement, M. Lepage s'était également occupé du problème des extrémales ne possédant que des dérivées partielles du premier ordre seulement.

Ce qui est remarquable dans les travaux de M. Lepage, c'est que sa méthode n'exige aucun calcul de variation première ou seconde; elle n'exige que l'opération de différentiation alternée d'une forme (ou d'un tenseur) alterné. Elle réduit à un simple problème de structure d'algèbre alternée des problèmes de nature formelle exigeant des calculs longs et souvent fastidieux.

Ces différentes recherches ont conduit M. Lepage à l'étude de problèmes qui se présentent dans l'Algèbre alternée et de nombreuses questions connexes. Il a formé plusieurs élèves.

M. P. Gillis a résolu un problème posé par M. Elie Cartan dans ses *Leçons sur les invariants intégraux*. Il s'agit d'un problème d'intégration d'une forme différentielle symbolique dans le cas où les coefficients de cette forme sont seulement continus. M. Gillis montre qu'il est alors possible de donner un sens à la formule classique de Stokes; il expose plusieurs applications intéressantes de ses résultats aux intégrales appartenant à une variété et au Calcul des variations. Depuis, il s'est occupé du problème de Dirichlet pour certaines équations de Monge-Ampère du type elliptique.

On sait que M. Elie Cartan a étudié les espaces métriques fondés sur la notion d'aire. Signalons qu'il utilise dans ses développements une formule du Calcul des variations due à M. Lepage. Un élève de celui-ci, M. R. Debever, a étudié les espaces à connexion euclidienne en partant également de la notion d'aire. Il importe de signaler que l'on doit à un autre jeune mathématicien belge, M. F. Alardin, élève de M. Simonart, professeur à l'Université de Louvain, d'intéressantes recherches sur les espaces de Cartan fondés sur la notion d'aire.

C'est vers la théorie des matrices et des formes ordinaires ou alternées qu'un autre élève de M. Lepage, M. Papy, a dirigé ses efforts. Il a obtenu dans cette voie d'importants résultats.

Enfin, M. L. Van Hove a consacré un mémoire à l'étude de la variation seconde d'une intégrale multiple.

C'est dans une toute autre voie que M. F. Bureau, Professeur à l'Université de Liège, a poursuivi d'importantes recherches; il a surtout étudié la théorie des fonctions et les équations différentielles et aux dérivées partielles. Citons tout d'abord des travaux sur les fonctions de Baire et sur les fonctions dont le développement de Taylor présente des lacunes.

Sous l'impulsion de M. Montel, M. Bureau a étudié les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé. En considérant simultanément les valeurs prises par la fonction et ses dérivées, il est parvenu à généraliser les théorèmes classiques de Picard, Landau et Schottky. Il a établi également un nouveau critère de famille normale. Ce travail a été l'origine de plusieurs études à l'étranger, notamment de la part de M. Miranda.

L'étude des intégrales d'une équation différentielle du premier ordre et du premier degré, dans le voisinage d'une singularité transcendante, a été poursuivie par H. Poincaré, Bendixson et M. Dulac. Par la construction d'une surface de Riemann à une infinité de feuillets, sur laquelle une intégrale donnée est uniforme, et la réduction à des types canoniques des surfaces ainsi obtenues, M. Bureau a pu établir une classification des points singuliers transcendants des équations envisagées.

Avant de parler des recherches de M. Bureau sur les équations aux dérivées partielles, signalons une note où il apporte à une méthode due à Painlevé pour la recherche des équations différentielles du second ordre dont l'intégrale générale a des points critiques fixes, des simplifications qui en rendent l'application plus rapide et plus aisée.

M. Hadamard, étudiant le problème de Cauchy pour les équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre, a montré que l'on est conduit à introduire la notion de partie finie ou de partie logarithmique d'une intégrale infinie, suivant que le nombre des variables indépendantes est impair ou pair. M. Bureau, en cherchant à donner aux calculs une forme invariantive vis-à-vis d'un changement quelconque de coordonnées ponctuelles, a réussi à simplifier l'exposé de la méthode. Il a ensuite étudié les rapports entre les notions de partie finie et de partie logarithmique, et la méthode dite de « descente ».

Passant aux équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur à deux, M. Bureau construit les solutions élémentaires des équations totalement elliptiques d'ordre pair, le nombre des variables indépendantes étant au plus égal à l'ordre. Les formules obtenues permettent de généraliser la théorie des potentiels et le problème de Dirichlet aux équations considérées.

Il s'est ensuite occupé du problème de Cauchy pour les équations aux dérivées partielles totalement hyperboliques, d'ordre supérieur à deux.

Signalons que dans certains cas, M. Bureau a ramené la recherche des solutions élémentaires à l'étude d'intégrales abéliennes attachées à une courbe algébrique.

M. Bureau a consacré de nombreux mémoires à ces questions; ce qui distingue ces travaux, c'est que leur auteur ne se contente pas d'établir l'existence des solutions, mais construit effectivement celles-ci de manière à pouvoir pousser éventuellement jusqu'aux calculs numériques. Il y a là un bel ensemble de recherches qui fait grand honneur à notre compatriote.

Dans des travaux récents, il s'est occupé de la mécanique ondulatoire de l'électron. Un de ses élèves, M. H. Garnir, a d'autre part apporté des contributions très intéressantes à la représentation des groupes finis, en vue des applications à la Physique théorique.

D'autres mathématiciens belges se sont également occupés des équations différentielles et aux dérivées partielles.

M. L. Bruwier, professeur à la Faculté polytechnique du Hainaut à Mons, a étudié l'intégration de certaines équations différentielles linéaires non homogènes et d'équations fonctionnelles, notamment d'équations qu'il appelle récurro-différentielles, où il s'agit de déterminer une fonction qui dépend à la fois d'une variable continue et d'un nombre entier. Il a également traité différents points de la théorie des fonctions.

M. R.H.J. Germay, professeur à l'Université de Liège, a appliqué la méthode des approximations successives à l'intégration d'équations différentielles et aux dérivées partielles, utilisant les idées de Picard et de Goursat. Il a également publié plusieurs notes sur les facteurs primaires de Weierstrass.

M. L. Lahaye, astronome l'Observatoire d'Uccle et professeur à l'Université de Bruxelles, s'est lui aussi occupé de divers problèmes concernant les équations différentielles, appliquant notamment des procédés d'itération à la recherche de leurs solutions. Il a également étudié le problème de n corps.

M. Teghem a, dans la théorie des nombres, étudié les sommes de Weyl en appliquant les méthodes de M. Vinogradov et de M. Van Der Corput. Récemment, il s'est occupé de certains procédés de sommation des séries divergentes.

M. R. Ballieu, professeur à l'Université de Louvain, a étudié la localisation des zéros des polynomes et, depuis, la théorie des idéaux des formes algébriques.

La Géométrie a toujours été très en honneur en Belgique depuis Quetelet et Dandelin, auxquels on doit ce que l'on a appelé en France les « théorèmes belges sur les coniques ». Il semble cependant que les géomètres belges aient en quelque sorte vécu en vase clos, sans contacts avec l'extérieur. Il est en effet curieux de constater qu'avant 1914, les travaux de Cremona, par exemple, étaient totalement inconnus dans notre pays; il n'était pas question, dans les cours de Géométrie supérieure de nos Universités, de transformations birationnelles. Parmi les géomètres belges de cette époque, seul Stuyvaert était en relations avec les géomètres italiens, mais il ne devait professer la Géométrie supérieure que beaucoup plus tard. C'est par lui que j'ai eu connaissance des travaux de l'Ecole italienne; une correspondance quasi hebdomadaire s'est établie entre lui, Répétiteur à l'Université de Gand et le jeune étudiant liégeois que j'étais alors. Je lui dois beaucoup et je saisis cette occasion de le reconnaître.

Lorsque, en 1925, j'ai été chargé d'enseigner la Géométrie supérieure à l'Université de Liège, j'ai orienté mon cours vers la Géométrie algébrique. Il m'est agréable, au moment où je vais précisément parler de l'orientation que j'ai donnée aux recherches de mes élèves, d'évoquer la mémoire de mon regretté Maître Federigo Enriques; les nombreuses conversations que j'ai eues avec lui, pendant nos longues promenades sous les arcades de Bologne ou à San Michele in Bosco, eurent sur ma formation une profonde influence. Il serait injuste de ne pas ajouter que je dois aussi beaucoup à C. Segre, à MM. Castelnuovo, G. Fano et F. Severi.

La durée des études dans nos Universités m'empêchait de conduire mes auditeurs bien loin dans la Géométrie sur une surface algébrique, je dus me borner à préparer mes élèves à l'étude de ces questions qui, après les travaux de Picard, G. Humbert et Painlevé, relèvent autant de l'analyse mathématique que de la géométrie. En fait, la matière de mes leçons ressortissait à la Géométrie projective : courbes et surfaces algébriques, transformations birationnelles, géométrie hyperspatiale. Parfois aussi, j'ai choisi comme objet de mes leçons la Géométrie projective différentielle.

Dans le quart de siècle qui vient de s'écouler, j'ai eu la joie de former quelques élèves et je voudrais me permettre de vous parler de leurs recherches.

M. Pol Burniat, actuellement professeur à l'Université de Bruxelles, a publié au début plusieurs travaux très intéressants sur les transformations birationnelles de l'espace dans l'hypothèse où les surfaces d'un des systèmes homaloïdaux ont, en un point fondamental, des contacts déterminés. Dans certains cas, il parvient à déterminer complètement la transformation; dans d'autres, il construit des exemples de manière à justifier les hypothèses faites. Il s'est ensuite tourné vers la Géométrie sur une surface algébrique. Dans cet ordre d'idées, il a déterminé les différents modèles projectifs de la surface d'Enriques, dépourvue de courbe canonique, mais possédant une courbe bicanonique d'ordre zéro. Il a ensuite cherché à déterminer les surfaces algébriques dont le système des sections hyperplanes constitue le système canonique; c'est un problème très difficile posé autrefois par Enriques et à la solution duquel M. Burniat a apporté d'intéressantes contributions. Il a enfin étudié les systèmes linéaires de courbes planes possédant une courbe fondamentale elliptique.

M. Octave Rozet a étudié des transformations birationnelles hyperspatiales, liées aux variétés de Veronese et de C. Segre, mais ses recherches ont surtout porté sur la Géométrie projective différentielle. Ses travaux les plus importants ont trait à la théorie des congruences de droites. Darboux a montré que l'on peut représenter une congruence W par une surface, tracée sur l'hyperquadrique de Klein, satisfaisant à une équation de Laplace. M. Rozet a montré que la surface qui représente une congruence quelconque, non W, satisfait à des équations aux dérivées partielles du troisième ordre et contient certains systèmes de courbes qui généralisent les réseaux conjugués, rencontrés dans une autre question par MM. Bompiani et B. Segre. Il a pu appliquer à ces surfaces les transformations de Laplace généralisées introduites par les géomètres qui viennent d'être cités et obtenir ainsi de nombreux résultats intéressants. M. Rozet a également considéré, dans l'espace projectif, certaines variétés analogues aux systèmes-points étudiés en géométrie métrique par C. Guichard.

C'est aussi par des recherches sur les transformations birationnelles qu'a débuté M. Linsman, mais la lecture d'un mémoire résumant un exposé fait au Séminaire de M. Hadamard, où M. Montel analysait les recherches de Juel en Géométrie finie, le conduisit à l'étude de ces questions. Il fut initié aux différents aspects de celles-ci successivement par MM. Montel, Bouligand, Marchaud et Haupt. Il a notamment établi que si une droite variant d'une manière continue dans l'espace engendre une surface rencontrée en trois points au plus par une droite n'appartenant pas à la surface, celle-ci possède, comme dans le cas algébrique, une droite double. Il a ensuite construit une géométrie très générale dans laquelle rentrent les géométries analogues à la géométrie finie. Depuis, il s'est tourné vers l'étude des machines à calculer.

La théorie des courbes fondamentales des transformations birationnelles de l'espace remonte à Cremona; on sait qu'il existe deux espèces de ces courbes : à une courbe de première espèce correspond une surface, à une courbe de seconde espèce une courbe. Lorsque l'on passe aux transformations birationnelles hyperspatiales, cette classification s'étend aux variétés fondamentales. L'étude approfondie de ces variétés a été faite par M. L. Derwidué qui, pour montrer l'existence effective des variétés rencontrées, a construit des exemples avec beaucoup d'ingéniosité. Il a ensuite étudié les transformations birationnelles du plan qui admettent un faisceau de courbes unies et celles de l'espace qui admettent soit un faisceau de surfaces unies, soit une congruence linéaire de courbes unies. Depuis, il s'est attaché à la démonstration d'une propriété fondamentale pour la Géométrie algébrique : il s'agit de démontrer que l'on peut toujours transformer birationnellement une variété algébrique en une autre dépourvue de points singuliers. La démonstration de cette propriété, lorsque la variété est une courbe, remonte à Halphen; lorsque la variété est une surface, elle a été donnée en premier lieu par M. Beppo Levi. M. Derwidué parvient à la démonstration dans le cas général par des procédés relativement simples. Les mêmes procédés lui permettent d'éliminer les variétés exceptionnelles d'une variété algébrique et de résoudre plusieurs questions connexes.

La détermination des différents types de congruences linéaires de cubiques gauches est un problème qui avait retenu l'attention de Stuyvaert voici une quarantaine d'années; j'avais également, à la même époque, étudié cette question. Celle-ci fut reprise récemment par M. L. Nollet, qui parvint à démontrer que les cubiques gauches d'une congruence linéaire se répartissent sur les surfaces d'un faisceau ou d'un réseau, le genre des sections planes de ces surfaces étant au plus égal à cinq. Ce théorème donne une méthode permettant de déterminer toutes les congruences en question.

La théorie des systèmes linéaires de courbes algébriques planes a été l'objet de nombreuses recherches surtout en Italie. Il s'agit de déterminer les systèmes linéaires de courbes d'ordre minimum, de genre donné, birationnellement distincts. Le problème a été repris récemment par MM. F. Jongmans et L. Nollet. Le premier s'était tout d'abord occupé des systèmes de courbes de genres trois et quatre, de dimensions au moins égales à trois, en vue de déterminer les surfaces et les variétés à trois dimensions dont les courbes sections ont ces genres. Ensuite, M. Nollet a soumis à une critique sévère toute la théorie, corrigeant sur certains points les travaux de ses devanciers, rendant plus rigoureuses les démonstrations de leurs résultats et donnant à cette théorie une assiette définitive. Les deux auteurs ont ensuite déterminé les systèmes linéaires de courbes de genre deux, trois et quatre, ainsi que ceux dont le système adjoint est réductible.

M. Jongmans s'est également occupé de rechercher les inégalités qui peuvent exister entre les genres d'une surface algébrique; il est parvenu à des résultats d'un grand intérêt, qui seront sans doute très utiles dans l'étude des surfaces irrégulières. Il a aussi étudié certaines séries linéaires de groupes de points sur une courbe algébrique et notamment les séries linéaires d'ordre minimum.

De son côté, M. Nollet a déterminé les surfaces sur lesquelles l'opération d'adjonction est périodique; il a également étudié des surfaces dont les genres satisfont à certaines inégalités.

Mad. Legrain-Pissard a fait une étude systématique des surfaces rationnelles dont les sections hyperplanes sont hyperelliptiques, apportant des compléments intéressants à une étude faite autrefois par M. Castelnuovo.

Les recherches de Géométrie dont nous venons de parler ont leur origine dans l'enseignement que nous faisons à l'Université de Liège, mais d'autres recherches, portant sur des questions analogues, ont été faites ailleurs.

M. Libois, professeur à l'Université de Bruxelles, a étudié les plans quadruples abéliens; il s'est aussi efforcé de dégager les principes de la Géométrie projective en liaison avec ceux de l'Algèbre. Enfin, avec un de ses élèves, M. P. Defrise, il a essayé d'introduire, en Géométrie algébrique, une notion invariantive du point, sans parvenir toutefois à résoudre ce délicat problème.

On doit à M. Defrise de belles recherches sur les courbes algébriques multiples, où il complète les résultats de Comessatti et de M. Chisini. Récemment, il a abordé l'étude de la structure des points unis des involutions non cycliques appartenant à une surface algébrique.

Un autre élève de M. Libois, M. P. Dedecker, a étudié des surfaces formées d'une sphère à laquelle on attache des anses (comme pour construire une surface de Riemann), mais aussi des rubans de Moebius. Il parvient à étendre aux correspondances rationnelles entre deux surfaces de cette nature, certaines formules de Géométrie algébrique, par exemple la formule de Zeuthen.

Enfin, M. J. Tits a étudié les géométries possédant un groupe transitif de transformations, généralisant ainsi la Géométrie projective. Il a retrouvé, en particulier, par une méthode différente, des résultats déjà obtenus à son insu par M. Zassenhaus.

La Géométrie infinitésimale classique, a été cultivée en Belgique par M. Simonart, professeur à l'Université de Louvain, par M. Backès, professeur à l'Université de Gand et par M. Delgleize, professeur à l'Université de Liège. On doit au premier des recherches sur les congruences de droites et, dans une autre voie, sur les configurations hexagonales. M. de La Vallée Poussin lui a confié la publication des nouvelles éditions de son *Traité d'Analyse infinitésimale*. Le second, poursuivant l'œuvre de son Maître A. Demoulin, étudie les congruences de droites, de cercles et de sphères, en utilisant une figure de référence mobile. Le troisième étudie également les congruences de droites et les transformations des surfaces, en utilisant le calcul plutôt que les méthodes géométriques.

M. A. Errera, professeur à l'Université de Bruxelles, s'est occupé de questions difficiles de théorie des nombres et de divers problèmes de topologie, en relation avec le problème des quatre couleurs. Son élève, M. G. Hirsch, a étudié les variétés fibrées et les représentations en soi d'une variété continue.

M. Deaux, professeur à la Faculté polytechnique du Hainaut, a étudié de nombreuses questions de Géométrie projective, notamment la détermination d'une projectivité dont on connait le carré. Enfin, un jeune géomètre gantois, M. Bilo, a étudié les principes de la Géométrie projective et particulièrement la géométrie projective quaternionienne.

Nous ne pouvons clore ce rapide exposé sans faire allusion aux importants travaux de M. De Donder et de ses élèves, travaux qui sont actuellement orientés surtout vers la Physique mathématique.

Une remarque s'impose en terminant. Les Mathématiques connaissent actuellement en Belgique un essort remarquable. Nous comptons de nombreux mathématiciens, beaucoup plus que dans un passé pas très lointain. En assurant à nos jeunes gens la possibilité matérielle de travailler, le Fonds National de la Recherche scientifique, créé pour répondre à un vœu du Roi Albert 1er, en est certainement une des causes.