

## UNA FAMIGLIA DI SUPERFICIE ALGEBRICHE DI CUI IL DIVISORE DI SEVERI VALE DUE.

DI LUCIEN GODEAUX, LIEGI

Si sa che quando il Severi ha introdotto il concetto di divisore di una superficie algebrica <sup>(1)</sup>, una sola superficie di divisore maggiore di uno era conosciuta. Era la superficie di Enriques, del sesto ordine, passante doppiamente per i spigoli di uno tetraedro, la quale ha il divisore  $\sigma = 2$ .

La superficie di Enriques è l'immagine di una involuzione del secondo ordine, senza punti uniti, appartenente ad una superficie di cui tutti i generi sono eguali a uno <sup>(2)</sup>. Da questo fatto, siamo stati condotti al seguente teorema: *La superficie immagine di una involuzione ciclica, senza punti uniti, appartenente ad una superficie algebrica, ha il divisore di Severi  $\sigma = p$ , essendo  $p$  l'ordine della involuzione.* Abbiamo dato alcune applicazioni di questo teorema.

In questa nota, vogliamo dare la costruzione, molto semplice, di una famiglia di superficie di divisore  $\sigma = 2$ .

Chiamiamo varietà di Veronese di indice  $n$  la varietà di ordine  $2^n$ , di uno spazio ad  $\frac{1}{2}n(n+3)$  dimensioni, di cui le sezioni iper-piane rappresentano le iperquadriche di uno spazio ad  $n$  dimensioni.

Consideriamo, in uno spazio  $S_R$  di

$$R = \frac{1}{2}m(m+3) + \frac{1}{2}n(n+3) + 1$$

(dimensioni  $m \geq 2$   $n \geq 2$ ) due spazi  $\Sigma_1$  di  $\frac{1}{2}m(m+3)$  dimensioni,  $\Sigma_2$  di  $\frac{1}{2}n(n+3)$  dimensioni, che non si incontrano, ed in  $\Sigma_1$ , una varietà di Veronese  $\Omega_1$  di indice  $m$ , in  $\Sigma_2$  una varietà di Veronese

$\Omega_2$  di indice  $n$ . La varietà luogo delle rette appoggiate sopra  $\Omega_1$  ed  $\Omega_2$ , è tagliata da uno spazio lineare ad  $R - (m + n - 1)$  dimensioni, in una superficie di divisore di Severi  $\sigma = 2$ .

Si potrebbe nello stesso modo costruire varietà algebriche di divisore due. Si potrebbe anche costruire superficie e varietà di divisore  $p$ , prendente le mosse da una omografia ciclica di periodo  $p$  con solo due assi.

1. Consideriamo in uno spazio a  $r = m + n + 1$  dimensioni, l'omografia armonica

$$H = \begin{pmatrix} y_0 y_1 \dots y_m - z_0 - z_1 \dots - z_n \\ y_0 y_1 \dots y_m & z_0 & z_1 & \dots & z_n \end{pmatrix}$$

di cui diremo  $\sigma_1, \sigma_2$  gli assi ( $y$ ) ( $z$ ) di dimensioni  $m$  e  $n$ .

Le iperquadriche mutate in sè da  $H$  formano due sistemi lineari di equazioni

$$(1) \quad \varphi(y_0, y_1, \dots, y_m) + \psi(z_0, z_1, \dots, z_n) = 0,$$

dove  $\varphi$  e  $\psi$  sono forme algebriche quadratiche, e

$$(2) \quad \sum \lambda_{jk} y_j z_k = 0, \quad (i = 0, 1, \dots, m; k = 0, 1, \dots, n).$$

Chiamiamo  $F$  la superficie intersezione completa di  $m + n - 1$  iperquadriche

$$(3) \quad \varphi_i(y) + \psi_i(z) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m + n - 1)$$

del sistema (1).

Sulla  $F$ , l'omografia  $H$  genera una involuzione  $I$  del secondo ordine. Supporremo  $m \geq 2, n \geq 2$ . Allora la superficie  $F$  non incontra gli assi  $\sigma_1, \sigma_2$  di  $H$ . L'involuzione  $I$  non ha punti uniti.

2. Per ottenere un modello proiettivo della superficie  $F'$  immagine della involuzione  $I$ , basta stabilire una proiettività fra le iperquadriche (1) ed gli iperpiani di uno spazio  $S_R$  di dimensione

$$R = \frac{1}{2} m(m + 3) + \frac{1}{2} n(n + 3) + 1.$$

Poniamo

$$Y_{jk} = y_j y_k, \quad (i, k = 0, 1, \dots, m),$$

$$Z_{jl} = z_j z_l, \quad (j, l = 0, 1, \dots, n).$$

Le equazioni della varietà  $V_{m+n+1}$  immagine della involuzione generata da  $H$  nello spazio  $S_{m+n+1}$  sono ottenute scrivendo che i determinanti

$$|Y_{jk}|, \quad |Z_{jl}|$$

sono di caratteristica uno.

Nello spazio  $\Sigma_1(z_0 = z_1 = \dots = z_n = 0)$ , le equazioni ottenute del primo determinante rappresentano una varietà di Veronese di indice  $m$ ,  $\Omega_1$  e nello spazio  $\Sigma_2(y_0 = y_1 = \dots = y_m = 0)$  abbiamo una varietà di Veronese di indice  $n$ ,  $\Omega_2$ .

La varietà  $V_{m+n+1}$  è il luogo delle rette appoggiate sulle varietà  $\Omega_1, \Omega_2$ . Il suo ordine è  $2^{m+n}$ .

Alle iperquadriche (3) corrispondono  $m + n - 1$  iperpiani di  $S_R$  che hanno in comune uno spazio lineare  $\Sigma$  di dimensione

$$R - (m + n - 1),$$

che non incontra le varietà  $\Omega_1, \Omega_2$ . Questo spazio taglia la varietà  $V_{m+n+1}$  nella superficie  $F'$  immagine dell'involuzione I.

3. La superficie  $F'$  rappresenta una involuzione senza punti uniti, dunque ha il divisore di Severi  $\sigma = 2$ . Questo fatto può essere stabilito agevolmente.

Dalla equazione delle iperquadriche (2) deduciamo

$$(4) \quad \Sigma \Sigma \lambda_{ik} \lambda_{jl} Y_{ij} Z_{kl} = 0,$$

dunque a queste iperquadriche corrispondono in  $S_R$  iperquadriche.

Leipersuperficie del quarto ordine

$$[\varphi(y) + \psi(z)]^2 = 0, \quad [\Sigma \lambda_{jk} y_j z_k]^2 = 0$$

appartengono ad un sistema lineare di cui tutti gli elementi sono trasformati in sè dalla omografia  $H$ . Quindi, le iperquadriche (4) toccano la varietà  $V_{m+n+1}$  in ogni punto di intersezione.

Se diciamo  $C$  le sezioni iperpiane di  $F'$  e  $C'$  le curve tagliate sulla superficie dalle iperquadriche (4), abbiamo

$$|2C| = |2C'|.$$

4. La superficie  $F'$  è regolare ed ha il genere aritmetico<sup>(4)</sup>

$$p_a = [(m + n)^2 - 7(m + n) + 14] 2^{m+n+4} - 1.$$

Fra i generi aritmetici  $p_a$  di  $F$  e  $p'_a$  di  $F'$ , abbiamo la relazione<sup>(5)</sup>

$$p_a + 1 = 2(p'_a + 1),$$

dunque  $p'_a = [(m + n)^2 - 7(m + n) + 14] 2^{m+n-5} - 1$ .

Il genere lineare di  $F'$  è

$$p^{(1)} = 2^{m+n} + 1.$$

La superficie  $F'$  è regolare.

5. Supponiamo  $m = n = 2$ . La superficie  $F'$  è la sezione della varietà  $V_5^{16}$  luogo delle rette appoggiate sopra due superficie di Veronese appartenente a spazi a cinque dimensioni che non si incontrano, in uno spazio da 11 dimensioni, da uno spazio ad otto dimensioni.

La superficie  $F$  è un modello della superficie di Enriques, di generi  $p_a = p_g = 0$ ,  $p^{(1)} = 1$ ,  $P_6 = 1$ .

## BIBLIOGRAFIA

- [1] SEVERI, *La base minima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique* (Annales de l'Ecole Normale Supérieure, 1908, pp. 449-488).
- [2] F. ENRIQUES, *Un'osservazione relativa alle superficie di bigenere uno* (Rendiconto dell'Accademia di Bologna, 1907-1908, pp. 40-45). Abbiamo dato recentemente una dimostrazione di questo teorema: *Sopra un teorema di F. Enriques* (VII° Congresso Nazionale dell'Unione Matematica Italiana, Sunti delle comunicazioni, Genova, 1963), *Sur un théorème di F. Enriques* (Bulletin des Sciences Mathématiques, 1963, pp. 138-141).
- [3] *Sur certaines surface algébriques de diviseur supérieur à l'unité* (Bulletin de l'Académie de Cracovie, 1914, pp. 362-388). Vedere anche la nostra monografia *Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications* (Roma, Edizioni Cremonese, 1963), p. 125).
- [4] *Sur les courbes et surfaces intersections d'hyperquadriques* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1944, pp. 262-269).
- [5] *Recherches sur les involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence appartenant à une surface algébrique* (Bulletin de la Société Mathématique de France, 1919, pp. 1-16). Vedere anche la monografia già citata.